ЛЕКЦИЯ 19. 5.10.2001

КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Свойства классического электромагнитного поля определяются уравнениями Максвелла

$$rot\vec{H} \quad - \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \qquad div\vec{E} \quad = \quad 4\pi\rho,$$

$$rot\vec{E} \quad + \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad = \quad 0, \qquad div\vec{H} \quad = \quad 0,$$

в которых плотности заряда и тока связаны уравнением непрерывности

$$div\vec{j} \quad + \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad = \quad 0.$$

Мы умеем квантовать системы, уравнения движения которых можно представить в форме уравнений Гамильтона. Можно ли свести к ним уравнения Максвелла? Хорошо известно, как это делается.

Поскольку дивергенция напряженности магнитного поля равна нулю, то ее можно представить как ротор другого вектора — **векторного потенциала** $\vec{A}$:

$$\vec{H} \quad = \quad rot\vec{A}.$$

После этого второе однородное уравнение Максвелла можно привести к форме

$$rot(\vec{E} \quad + \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \quad = \quad 0.$$

Это позволяет выразить электрическую напряженность как

$$\vec{E} \quad = \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad - \quad grad\phi.$$

Функцию ϕ называют **скалярным потенциалом**.

Значения напряженностей не изменяются при **калибровочных преобразованиях**

$$\vec{A} \quad \Longrightarrow \quad \vec{A} \quad + \quad grad\chi,$$

$$\phi \quad \Longrightarrow \quad \phi \quad - \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Функцию ϕ можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$div\vec{A} \quad = \quad 0.$$

В этом случае говорят о **кулоновой калибровке**.

В кулоновой калибровке второе неоднородное уравнение Максвелла принимает вид
$$div\vec{E} \quad = \quad -\nabla^2\phi \quad = \quad 4\pi\rho.$$
Решение этого уравнения
$$\phi(\vec{r},t) \quad = \quad \int\frac{\rho(\vec{r}^{\,\prime},t)}{|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}|}d\vec{r}^{\,\prime}.$$
показывает, что значения скалярного потенциала определяется мгновенным распределением зарядов, т.е. **в кулоновой калибровке скалярный потенциал $\phi(\vec{r},t)$ не является независимой динамической переменной**.

Последнее из уравнений Максвелла принимает вид
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \quad - \quad \nabla^2\vec{A} \quad = \quad \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp,$$
где вектор $\vec{j}_\perp$, равный
$$\vec{j}_\perp \quad = \quad \vec{j} \quad - \quad \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t},$$
удовлетворяет уравнению
$$div\vec{j}_\perp \quad = \quad 0.$$

> Таким образом в кулоновой калибровке свойства электромагнитного поля определяются **векторным потенциалом** $\vec{A}$, удовлетворящим дополнительному условию

$$div\vec{A} \quad = \quad 0.$$

Чтобы перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим только функции времени, удобно выделить явно то, что определяет векторные свойства поля. Технически это проще всего делаться следующим способом. Предполагается, что поле заключено в кубе объема $V = L^3$. Это позволит разложить потенциал в ряд Фурье.
$$\vec{A}(\vec{r}) \quad = \quad \sum\nolimits_{\vec{f}}(e^{i\vec{f}\vec{r}}\vec{A}_{\vec{f}} \quad + \quad e^{-i\vec{f}\vec{r}}\vec{A}^*_{\vec{f}}).$$
Входящие в ряд Фурье слагаемые сгруппированы так, чтобы это разложение автоматически приводило к действительной сумме
$$\vec{A} \quad = \quad \vec{A}^*.$$
Требование самосопряженности оператора импульса приводит к условию периодичности
$$\vec{A}(x_\alpha + L) \quad = \quad \vec{A}(x_\alpha).$$
Это условие определяет возможные значения $\vec{f}$:
$$\vec{f} \quad = \quad \frac{2\pi}{L}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — вектор с целочисленными составляющими

$$\vec{n} \quad = \quad (n_1, n_2, n_3) \qquad n_\alpha \quad = \quad 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Условие $div\vec{A} = 0$ приводит к равенству

$$div\vec{A}(\vec{r}) \quad = \quad i\sum\nolimits_{\vec{f}}(e^{i\vec{f}\vec{r}}(\vec{f}\vec{A}_{\vec{f}}) \quad - \quad e^{-i\vec{f}\vec{r}}(\vec{f}\vec{A}^*_{\vec{f}})) \quad = \quad 0.$$

Оно будет удовлетворено автоматически, если подчинить коэффициенты $\vec{A}_{\vec{f}}$ условиям

$$\vec{f}\vec{A}_{\vec{f}} \quad = \quad 0, \qquad \vec{f}\vec{A}^*_{\vec{f}} \quad = \quad 0.$$

Решения полученных уравнений имеют вид

$$\vec{A}_{\vec{f}} \quad = \quad \sum\nolimits_{\lambda=1}^{2}\vec{e}_\lambda(\vec{f})A_\lambda(\vec{f}), \quad = \quad \vec{A}^*_{\vec{f}} \quad = \quad \sum\nolimits_{\lambda=1}^{2}\vec{e}_\lambda(\vec{f})A_\lambda(\vec{f})^*$$

где векторы $\vec{e}$ удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\vec{e}_{\lambda_1}(\vec{f})\vec{e}_{\lambda_2}(\vec{f}) \quad = \quad \delta_{\lambda_1\lambda_2}, \qquad \vec{e}_{\lambda_1}(\vec{f}) \times \vec{e}_{\lambda_2}(\vec{f}) \quad = \quad \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|}.$$

и полноты

$$\sum\nolimits_\lambda \vec{e}_{\lambda\alpha}\vec{e}_{\lambda\beta} \quad = \quad \delta_{\alpha\beta} - \frac{f_\alpha f_\beta}{\vec{f}^2}.$$

Далее уточняется вид коэффициентов $A_\lambda(\vec{f})$:

$$A_\lambda(\vec{f}) \quad = \quad B(|\vec{f}|)a_\lambda(\vec{f}), \qquad A_\lambda{}^*(\vec{f}) \quad = \quad B(|\vec{f}|)a_\lambda{}^*(\vec{f}),$$

где

$$B(|\vec{f}|) \quad = \quad c\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega(|\vec{f}|)}}, \qquad \omega(|\vec{f}|) \quad = \quad c|\vec{f}|.$$

Коэффициенты $B(|\vec{f}|)$ выбираются так, чтобы энергия электромагнитного поля

$$E \quad = \quad \frac{1}{8\pi}\int(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)d\vec{r},$$

которая в кулоновой калибровке определяется формулой

$$E \quad = \quad \frac{1}{8\pi}\int d\vec{r}((rot\vec{A})^2 + \frac{1}{c^2}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})^2) \quad + \quad \frac{1}{2}\int d\vec{r}d\vec{r}^{\,\prime}\,\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}^{\,\prime})}{|\vec{r} - \vec{r}^{\,\prime}|},$$

в случае свободного поля $(\rho = 0)$ принимала вид

$$E \quad \equiv \quad \mathcal{H}(a_\lambda(\vec{f}), a^*{}_\lambda(\vec{f})) \quad = \quad \sum_{\vec{f},\lambda}\hbar\omega(\vec{f})a^*{}_\lambda(\vec{f})a_\lambda(\vec{f}).$$

После подстановки в уравнение Максвелла разложения потенциала в ряд Фурье получается долгожданная система уравнений для коэффициентов $a_\lambda(\vec{f})$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{d^2 a_\lambda(\vec{f})}{dt^2} \quad + \quad \vec{f}^2 a_\lambda(\vec{f}) \quad &= \quad j_\lambda(\vec{f}), \\
\frac{1}{c^2}\frac{d^2 a_\lambda{}^*(\vec{f})}{dt^2} \quad + \quad \vec{f}^2 a_\lambda{}^*(\vec{f}) \quad &= \quad j_\lambda{}^*(\vec{f}),
\end{aligned}$$

где $j_\lambda(\vec{f})$ — коэффициенты Фурье плотности тока.

В случае свободного поля любое решение этих уравнений сводится к суперпозиции функций

$$\begin{aligned}
a_\lambda(\vec{f},t) \quad &= \quad a_\lambda(\vec{f})e^{-i\omega(\vec{f})t}, \\
a_\lambda{}^*(\vec{f},t) \quad &= \quad a_\lambda{}^*(\vec{f})e^{i\omega(\vec{f})t}
\end{aligned}$$

с произвольными комплексными числами $a_\lambda(\vec{f})$ и $a_\lambda{}^*(\vec{f})$.

Эти функции — решения уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a_\lambda(\vec{f},t) \quad &= \quad -i\omega(\vec{f})a_\lambda(\vec{f},t), \\
\frac{d}{dt}a_\lambda{}^*(\vec{f},t) \quad &= \quad -i\omega(\vec{f})a_\lambda{}^*(\vec{f},t),
\end{aligned}$$

Если рассматривать $a_\lambda(\vec{f})$ и $a_\lambda{}^*(\vec{f})$ как независимые переменные, то приведенные выше уравнения можно записать как уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a_\lambda(\vec{f},t) \quad &= \quad -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a_\lambda{}^*(\vec{f})}, \\
\frac{d}{dt}a_\lambda{}^*(\vec{f},t) \quad &= \quad \frac{i}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a_\lambda(\vec{f})}.
\end{aligned}$$

Если F — произвольная функция $a_\lambda(\vec{f})$ и $a_\lambda{}^*(\vec{f})$, то ее производная по времени равна

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} \quad &= \quad \sum_{\vec{f},\lambda}\frac{\partial F}{\partial a_\lambda{}^*(\vec{f})}\frac{d}{dt}a_\lambda{}^*(\vec{f}) \quad + \quad \frac{\partial F}{\partial a_\lambda(\vec{f})}\frac{d}{dt}a_\lambda(\vec{f}) \quad = \\
&\frac{i}{\hbar}\sum_{\vec{f},\lambda}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a_\lambda(\vec{f})}\frac{\partial F}{\partial a_\lambda{}^*(\vec{f})} \quad - \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a_\lambda{}^*(\vec{f})}\frac{\partial F}{\partial a_\lambda(\vec{f})}
\end{aligned}$$

Если определить **скобку Пуассона** функций A и B

$$\{A,B\} \quad = \quad \sum_{\vec{f},\lambda}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial a_\lambda(\vec{f})}\frac{\partial B}{\partial a_\lambda{}^*(\vec{f})} \quad - \quad \frac{\partial A}{\partial a_\lambda{}^*(\vec{f})}\frac{\partial B}{\partial a_\lambda(\vec{f})},$$

то производную F можно записать в форме

$$\frac{dF}{dt} = \frac{i}{\hbar}\{H, F\}.$$

Для дальнейшего существенно, что скобка Пуассона функций $a_\lambda(\vec{f})$ и $a_\lambda{}^*(\vec{f})$ равна соотвествующим символам Кронекера

$$\{a_\lambda(\vec{f}), a_{\lambda'}{}^*(\vec{f}_1)\} = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\vec{f},\vec{f}_1}.$$

Это соотношение вместе с аналогичными равенствами

$$\{a_\lambda(\vec{f}), a_{\lambda'}(\vec{f}_1)\} = 0,$$

$$\{a_\lambda{}^*(\vec{f}), a_{\lambda'}{}^*(\vec{f}_1)\} = 0.$$

можно принять за определение величин $a_\lambda(\vec{f})$ и $a_\lambda{}^*(\vec{f})$.

Нетрудно проквантовать электромагнитное поле — определить **оператор векторного потенциала** в кулоновой калибровке. Для этого определяют пары эрмитово сопряженных операторов $\hat{a}_\lambda(\vec{f})$ и $\hat{a}^*_\lambda(\vec{f})$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$[\hat{a}_\lambda(\vec{f}), \hat{a}_{\lambda'}(\vec{f}_1)\} = 0,$$

$$[\hat{a}^*_\lambda(\vec{f}), \hat{a}^*_{\lambda'}(\vec{f}_1)\} = 0,$$

$$\hat{a}_\lambda(\vec{f}), \hat{a}^*_{\lambda'}(\vec{f}_1)\} = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\vec{f},\vec{f}_1}.$$

Основная динамическая переменная поля становится оператором

$$\hat{A}(\vec{r}) = \sum_{\vec{f},\lambda} B(\vec{f})\vec{e}_\lambda(\vec{f})(\hat{a}_\lambda(\vec{f})e^{i\vec{f}\vec{r}} + \hat{a}^*_\lambda(\vec{f})e^{-i\vec{f}\vec{r}},$$

а операторы энергии и импульса электромагнитного поля определяются выражениями

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{f},\lambda} \hbar\omega(\vec{f})\hat{n}_{\vec{f},\lambda},$$

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{f},\lambda} \hbar\vec{f}\hat{n}_{\vec{f},\lambda},$$

где самосопряженные операторы $\hat{n}_{\vec{f},\lambda}$, равны

$$\hat{n}_{\vec{f},\lambda} = \hat{a}^*_\lambda(\vec{f})\hat{a}_\lambda(\vec{f}).$$