Метод решения второго практического задания

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad 0 < x \le 1, && (1)\\ u(x,0) &= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x-2) + 2, && (2)\\ u(0,t) &= \left(2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2\right) \mathrm{e}^{-t}. && (3) \end{aligned}$$

Введем разностную сетку

$$\omega = \left\{ x_i = ih_x,\ i = 0,\ldots,N,\ h_x = \frac{1}{N}; \quad t_j = j\tau \right\},$$

где N — число узлов вдоль оси x, τ — шаг по времени.

Перепишем уравнение (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0 \tag{4}$$

Введем сеточную функцию $y_{ij} = \tilde{u}\left(x_i, t_j\right)$. Разностная аппроксимация уравнения (4) в точке $\left(x_i + \frac{1}{2}h_x, t_j + \frac{\tau}{2}\right)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\hat{y}_i - y_i + \hat{y}_{i+1} - y_{i+1}}{2\tau} + \frac{y_{i+1}^2 - y_i^2 + \hat{y}_{i+1}^2 - \hat{y}_i^2}{4h_x} = 0. \tag{5}$$

а для граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned} y_{i0} &= \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(x_i - 2\right) + 2, && (6)\\ y_{0j} &= \left(2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2\right) \mathrm{e}^{-t_j}. && (7) \end{aligned}$$

Полученную разностную задачу (5)-(7) будем решать при помощи схемы бегущего счета. Пусть известно значение сеточной функции для некоторого t_j, вычислим значение функции для t_{j+1}. Выписывая уравнение (5) при $i = 0$ и учитывая, что y_{0j+1} известно из (7), получим квадратное уравнение для определения y_{1j+1}. Будем решать данное уравнение итерационным методом (предположим, что мы не можем аналитически решить это уравнение).

$$f\left(\hat{y}_1\right) = \frac{1}{4h_x}\hat{y}_1^2 + \frac{1}{2\tau}\hat{y}_1 + \frac{\hat{y}_0 - y_0 - y_1}{2\tau} + \frac{y_1^2 - y_0^2 - \hat{y}_0^2}{4h_x} = 0$$

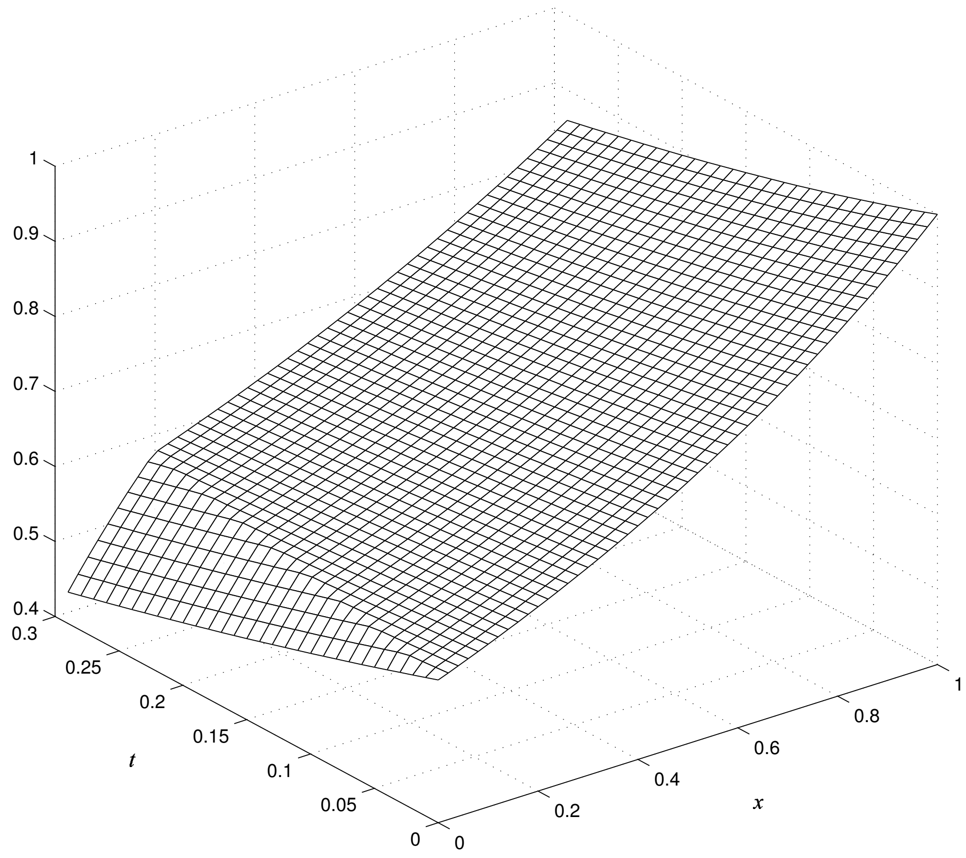

Рис. 1: Результаты решения задачи (1)-(3)

Пусть известно некоторое приближение $\hat{y}_1^{(s)}$ к корню $\hat{y}_1$, тогда уравнение примет вид $f\left(\hat{y}_1^{(s)} + \Delta\hat{y}_1^{(s)}\right) = 0$, где $\Delta\hat{y}_1 = \hat{y}_1 - \hat{y}_1^{(s)}$. Раскладывая в ряд данное уравнение и линеаризуя его, получим:

$$f'\left(\hat{y}_1^{(s)}\right)\Delta\hat{y}_1^{(s)} = -f\left(\hat{y}_1^{(s)}\right).$$

Следовательно,

$$\hat{y}_1^{(s+1)} = \hat{y}_1^{(s)} - \frac{f\left(\hat{y}_1^{(s)}\right)}{f'\left(\hat{y}_1^{(s)}\right)}.$$

Процесс останавливается по достижении заданной точности ε: $\left|\Delta\hat{y}_1^{(s)}\right| < \varepsilon$.

Последовательно вычисляя $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\ldots\hat{y}_N$, получим значение функции для t_{j+1}.

Результаты расчетов приведены на рисунке.

Выбор шагов h_x и τ осуществляется с учетом условий устойчивости используемых методов (см., например, Н.Н. Калиткин "Численные методы").