

## Глава 5. Корпускулярно–волновой дуализм.

До конца XIX в. считалось, что излучение имеет чисто волновую природу. Правда, гипотеза о корпускулярном строении света высказывалась ранее неоднократно. Её разделял, например, Ньютон. Однако, после исследований Френеля и Юнга в начале XIX в. по интерференции и дифракции световых волн и, особенно, после создания Максвеллом электродинамики во второй половине XIX в. возобладала волновая концепция. Но на рубеже XIX и XX вв. появились факты, свидетельствующие в пользу квантовой природы излучения. В 1900 г. Планк в основу теории чёрного тела положил гипотезу о квантованных осцилляторах. Он предположил, что стенки полости обмениваются энергией с полем излучения, причём порции энергии не могут быть меньше, чем  $\hbar\omega$ , где  $\omega$  — собственная частота осциллятора. Позднее, в 1905 г. Эйнштейн предложил объяснение фотоэффекта, в котором квантовые свойства имеет уже само излучение, а не только гипотетические осцилляторы полости.

Электромагнитное излучение характеризуется волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$ . Описание плоской волны с точки зрения волновой теории имеет вид:

$$(1) \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)],$$

где  $\psi$  — любая величина, принимающая участие в волновом движении, а  $\psi_0$  — её амплитуда.

Попытаемся теперь перейти к квантовому описанию волнового процесса, то есть, напомним формулу, в которой будут присутствовать как волновые, так и корпускулярные характеристики объекта. По Планку и Эйнштейну энергия кванта связана с частотой волны:

$$(2) \quad E = \hbar\omega,$$

а его импульс — с её волновым вектором:

$$(3) \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}.$$

В результате корпускулярная интерпретация формулы (1) выглядит следующим образом:

$$(4) \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}\mathbf{r} - Et) \right]$$

Это уравнение выражает корпускулярно-волновой дуализм: описание волны в качестве параметров содержит энергию и импульс частицы.

Формула (1) описывает монохроматическое излучение с точно определёнными значениями частоты и длины волны. Примером такого излучения может служить идеализированное представление о спектральной линии — переходе между дискретными уровнями энергии атома. В действительности спектральная линия имеет конечную ширину, то есть содержит много частот. Такое явление называется «уширением» линии. Существует много причин уширения линии. Рассмотрим одну из них — тепловое движение атомов.

### 5.1 Доплеровский профиль спектральной линии

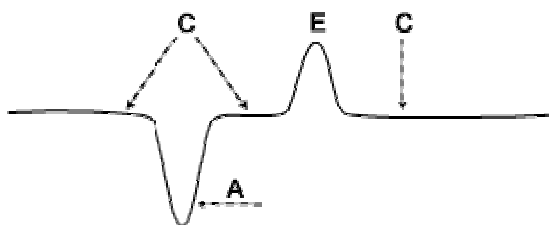


Рис. 5.1.1 Участок спектра с континуумом (C) и линиями: эмиссионной (E) и абсорбционной (A)

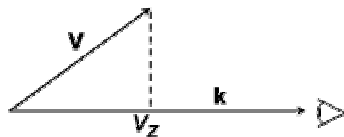
Задача о смещении частоты излучения, как правило, ставится с использованием спектральных линий — относительно узких деталей спектра, выделяемых локальным усилением или ослаблением

потока. Большая часть спектра медленно меняется с частотой, её называют «непрерывным спектром», или «континуумом». Область, где поток резко ослабляется, называется линией поглощения, или абсорбционной линией; соответственно, область усиленного потока, называется эмиссионной линией. Спектральные линии образуются в результате дискретных переходов в атомах. На рис. 5.1.1 схематически изображён участок спектра, на котором видны континуум, абсорбционная и эмиссионная линии.

Функция распределения фотонов по длинам волн или частотам называется профилем, или контуром спектральной линии. Каждый профиль характеризуется несколькими параметрами, например, частотой  $\omega_0$  или длиной волны  $\lambda_0$  центра линии, а также её шириной.

### Доплеровское уширение

На рис. 5.1.2 схематически изображён атом, излучающий в процессе движения относительно наблюдателя. Частота света  $\omega$ , регистрируемого прибором от движущегося источника, равна



$$(1.1) \quad \omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{v_z}{c} \right).$$

Рис. 5.1.2. Движение источника света относительно наблюдателя.

Здесь  $\omega_0$  — частота света от неподвижного источника,  $v_z$  — проекция скорости источника на луч зрения. Проекция в данном случае считается *положительной*, если источник *приближается* к наблюдателю.

Рассмотрим беспорядочное тепловое движение атомов и введём обозначение  $dP$  для вероятности обнаружить проекцию скорости атома в диапазоне от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ . Будем полагать, что величина  $v_z$  подчиняется максвелловскому распределению, схематически изображённому на рис 5.1.3:

$$(1.2) \quad dP = \sqrt{\frac{M}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{Mv_z^2}{2T}\right) dv_z,$$

где  $M$  — масса атома,  $T$  — температура газа. Правая часть равенства нормирована на единицу.

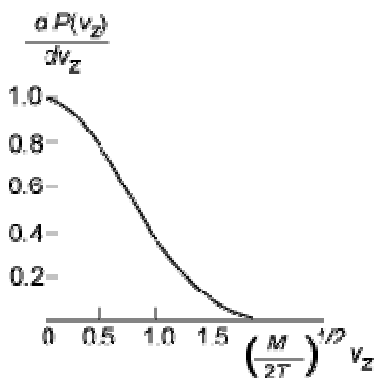


Рис. 5.1.3. Одномерное максвелловское распределение

В этом легко убедиться, вспомнив табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Из (1.1) выразим  $v_z$  через отстройку

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0$$

частоты  $\omega$ , излучаемой атомом, от частоты  $\omega_0$  центра линии:

$$v_z = \frac{c}{\omega_0} \Delta\omega.$$

Таким образом, профиль спектральной линии можно выразить как в шкале частот, так и в шкале скоростей:

$$dP = a_{\omega} d\omega = f(v_z) dv_z,$$

причём обе функции нормированы на единицу:

$$\int f(v_z) dv_z = \int a(\omega) d\omega = 1.$$

Введём тепловой масштаб скорости

$$v_0 = \sqrt{\frac{2T}{M}}$$

и доплеровскую полуширину линии

$$(1.3) \quad \Delta\omega_D = \omega_0 \sqrt{\frac{2T}{Mc^2}}.$$

Используя их, функцию распределения атомов  $f(v_z)$  и профиль линии  $a(\omega)$  можно выразить следующим образом:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) dx \\ a_{\omega}(y) dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2) dy \end{aligned}.$$

С целью сокращения записи в последней формуле введены обозначения

$$(1.4a) \quad x = \frac{v_z}{v_0}, \quad y = \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}.$$

Отклонению  $\Delta\omega_D$  от центра линии отвечает уменьшение  $a_{\omega}$  в  $e = 2.718\dots$  раз.

Помимо доплеровского профиля, существуют и другие причины конечной ширины

спектральной линии. Как правило, они обусловлены взаимодействием атома с окружающими частицами — ионами, электронами, молекулами и атомами. Они будут рассмотрены в других главах.

## 5.2 Гравитационное красное смещение

С помощью формулы Эйнштейна  $E = mc^2$  припишем фотону массу

$$m_{\phi} = \hbar\omega / c^2.$$

Наличие у фотона массы означает, что она должна проявляться в гравитационном поле. Потенциальная энергия фотона на поверхности звезды равна

$$U_0 = -G \frac{Mm_{\phi}}{R} = -G \frac{M\hbar\omega}{Rc^2},$$

где  $M$  и  $R$  — соответственно, масса и радиус звезды. На большом расстоянии от звезды потенциальная энергия фотона равна нулю, так что из закона сохранения энергии имеем:

$$\hbar\omega_0 - G \frac{M\hbar\omega_0}{Rc^2} = \hbar\omega.$$

Отсюда получается гравитационное красное смещение (или так называемый возраст фотона)

$$Z_g = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{GM}{Rc^2}.$$

Для Солнца величина  $Z_g$  оказывается порядка  $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ . Оценим величину сдвига для длины волны  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . Воспользовавшись равенством

$$\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|,$$

вытекающим из соотношения  $\lambda = 2\pi c/\omega$ , получим

$$\Delta\lambda \approx 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ \AA} = 0.01 \text{ \AA}.$$

Сопоставим эту величину с доплеровской полушириной линии. Для атома водорода в условиях солнечной фотосферы при  $T \sim 0.5 \text{ эВ}$  из (1.3) она равна

$$\frac{\Delta\omega_D}{\omega_0} \approx 3 \cdot 10^{-5},$$

то есть, приблизительно в пятнадцать раз больше, чем красное смещение. Таким образом, эффект «покраснения» фотона на Солнце замаскирован доплеровским уширением линии.

Но существуют звёзды, для которых гравитационное покраснение излучения может оказаться заметным. Это — белые карлики. Радиус белого карлика солнечной массы примерно в сто раз меньше, чем у Солнца. Так как гравитационное смещение фотона пропорционально отношению массы звезды к её радиусу, то величина  $Z_g$  у белых карликов достигает значения  $2 \cdot 10^{-4}$ , сравнимого с доплеровской шириной линии.

Эйнштейн вывел более точную формулу для  $Z_g$ :

$$Z_g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} - 1,$$

откуда при  $GM / (Rc^2) \ll 1$  получим уже известную оценку

$$Z_g \approx \frac{GM}{Rc^2}.$$

Величина

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

называется радиусом Шварцшильда. Если радиус некоторого объекта меньше  $R_g$ , то фотон не может его покинуть. Для Солнца величина  $R_g$  равна трём километрам, для Земли — одному сантиметру, а для планковской массы — планковской длине.

### 5.3 Волновые свойства частиц

Эффект Комптона доказывает, что излучение может проявлять свойства корпускул. Теперь мы убедимся, что частицы при определённых условиях ведут себя как волны. На рис.5.3.1 показан пример дифракции электронов на тонкой золотой плёнке.

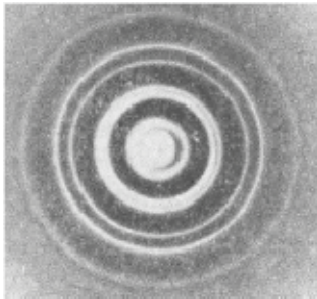


Рис.5.3.1. Электронограмма тонких листов золота.

Раскрытие темы волновых свойств частиц удобно провести, сравнивая основы геометрической оптики и механики.

#### Оптико-механическая аналогия

В пределе малых длин волн распространение света можно рассматривать в приближении геометрической оптики. При этом, совершенно отвлекаясь от волновой природы света, можно ввести понятие лучей как линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением распространения волны. В геометрической оптике вместо перемещения *волнового фронта* рассматривается прохождение *лучей* через линзы, призмы и другие оптические приборы. Приближение геометрической оптики справедливо, если длина волны  $\lambda$  значительно меньше размера  $L$  освещаемого объекта (а также масштабов неоднородностей среды). В случае  $\lambda \sim L$  проявляются интерференционные эффекты. Это — область чисто волновой оптики. Существует глубокая аналогия между геометрической оптикой и классической механикой, в которых теоретическое рассмотрение можно построить на основе принципа наименьшего действия. В классической механике это — вариационный принцип Мопертюи (ранее он был сформулирован Лагранжем и Эйлером): траектория частицы определяется из условия

$$(3.1) \quad \delta S = 0,$$

где укороченное действие  $S$  равно интегралу от импульса частицы по пути её следования из точки «1» в точку «2»:

$$(3.2) \quad S = \int_1^2 p dl.$$

В оптике действует принцип Ферма для эйконала

$$(3.3) \quad \delta\Psi=0,$$

определяемого как интеграл от волнового числа  $k$  по траектории оптического луча

$$(3.4) \quad \Psi = \int_1^2 k dl.$$

Из определения ясно, что эйконал представляет собой фазу. Приведём пример, иллюстрирующий связь между показателем преломления в оптике и импульсом в механике. Как следует из формул (3.1–3.4), формальные схемы теоретического построения в геометрической оптике и классической механики отличаются лишь заменой:

$$k \rightarrow p.$$

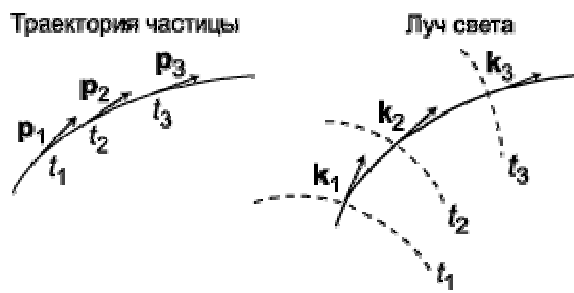


Рис.5.3.2. Аналогия между частицей и лучом света.

Смысл такой замены иллюстрирует рис.5.3.2. Траекторию частицы мы задаём, определяя в различные моменты времени импульс  $p$ . Аналогично, ход луча мы ассоциируем с перемещением волнового вектора  $k$ , нормального к волновому фронту. Положение волнового фронта в разные моменты времени на рисунке обозначено штриховыми линиями. Напомним, что волновое число  $k$  связано с длиной волны:  $k=2\pi/\lambda$ . Длина волны, в свою очередь, обратно пропорциональна показателю преломления среды  $n$ :

$$\lambda = \lambda_0 / n,$$

где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме. Следовательно, формулу (3.4) можно переписать в виде

$$(3.5) \quad \Psi \propto \int_1^2 n dl.$$

В однородной среде показатель преломления остаётся постоянным, поэтому в (3.5) его можно вынести за знак интеграла:

$$\delta\Psi \sim n \int dl = 0.$$

В результате получился закон прямолинейного распространения лучей. Аналогично, условие Мопертюи (3.1) в отсутствие внешних полей, когда  $p = \text{const}$ :

$$\delta S \sim p \int dl = 0$$

означает прямолинейное движение частицы. Всё сказанное выше в сжатой форме выражает табл.5.1.

Таблица 5.1. Оптико–механическая аналогия.

ОПТИКА		МЕХАНИКА	
волновая	геометрическая	классическая	волновая (квантовая)
$\lambda \sim L$	$\lambda \ll L$ (лучи)	$\lambda_D \ll L$ (траектория)	$\lambda_D \sim L$
дифракция интерференция	принцип наименьшего действия		дифракция интерференция
	принцип Ферма	принцип Мопертюи	
	$\delta\Psi = 0$ $\Psi \sim \int k \, dl \sim \int n \, dl$	$\delta S = 0$ $S \sim \int p \, dl$	
	$n \rightleftharpoons p$		

Таким образом, мы видим, что формальный переход от геометрической оптики к классической механике и обратно состоит в замене

$$(3.6) \quad n \leftrightarrow p.$$

Эта аналогия лежит в основе электронной оптики.

#### Пример связи импульса и показателя преломления

Проиллюстрируем связь между импульсом в механике и показателем преломления в оптике. При переходе границы двух прозрачных сред луч света изменяет своё направление. На рис. 5.3.3  $n_1$  и  $n_2$  — значения показателя преломления в каждой среде. Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  отсчитываются от нормали к

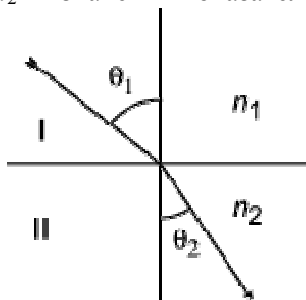


Рис. 5.3.3. Преломление света на границе двух сред

поверхности раздела. Согласно закону Снеллиуса,

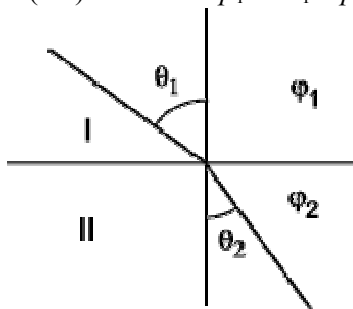
$$(3.7) \quad n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2.$$

Теперь рассмотрим электрон с импульсом  $p$ , который проходит через границу сред с разностью потенциалов  $\Delta\varphi$ . Её можно создать, например, приложив напряжение к сеткам на поверхности раздела двух сред, как на рис.5.3.4. При пересечении границы раздела сохраняется неизменной тангенциальная составляющая импульса

$$p_{\parallel 1} = p_{\parallel 2},$$

а нормальная компонента меняется, откуда следует

$$(3.8) \quad p_1 \cdot \sin\theta_1 = p_2 \cdot \sin\theta_2.$$



Сопоставляя формулы (3.7) и (3.8), мы видим, что они отличаются только заменой (3.6). Итак, импульс частицы ведёт себя аналогично показателю преломления для луча света. Поскольку импульс электрона  $p$  однозначно связан с потенциалом  $\varphi$ :

$$\frac{p^2}{2m} = e\varphi,$$

то, создавая должное распределение электрических полей, можно

Рис. 5.3.4. Преломление траектории электрона.

получать среды с нужным показателем преломления для заряженных частиц и конструировать электроннооптические приборы.

### Дебройлевская длина волны

Оптико–механическая аналогия наводит на мысль сопоставить импульс и длину волны. В оптике показатель преломления и волновое число обратно пропорциональны длине волны:

$$(3.9) \quad n \sim k \sim 1/\lambda.$$

Согласно вышеизложенному, импульс частицы  $p$  является аналогом показателя преломления или волнового числа. Поэтому можно предположить, что существует величина, имеющая размерность длины и связанная с импульсом частицы соотношением, аналогичным (3.9):

$$(3.10) \quad p \sim 1/\lambda.$$

Выясним, чему равен коэффициент пропорциональности в последней формуле. Для фотона

$$(3.11) \quad p = \hbar k = h / \lambda.$$

Если обратить эту формулу, сопоставляя её с соотношением (3.10) для частицы, то можно написать

$$(3.12) \quad \lambda_D = h/p = h / (mv),$$

где  $\lambda_D$  — длина волны частицы. Величина  $\lambda_D$  была введена Луи де Бройлем в 1924 г. На первый взгляд, предположение о существовании волновых свойств частиц кажется несуразным: ведь у обычных тел они никогда не наблюдались. Но всё дело в том, что постоянная Планка очень мала, а масса макроскопических тел — велика. Поэтому в макромире величина  $\lambda_D$  значительно меньше размеров любых реальных объектов.

### Примеры

Рассмотрим несколько примеров, из которых нам станет ясно, в каких случаях можно ожидать проявления волновых свойств частиц.

1) Грузовик массой 10 тонн движется со скоростью 36 км/час. Соответствующая длина волны де Бройля равна

$$\lambda_D = \frac{6.63 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}}{10^7 \text{ г} \cdot 10^3 \text{ см/с}} \sim 7 \cdot 10^{-37} \text{ см.}$$

Эта величина значительно меньше даже планковской длины и, следовательно, никогда не может быть обнаружена.

2) Пылинка массой  $10^{-3}$  г плавает в воздухе со скоростью  $v = 1$  мкм/с. В этом случае

$$\lambda_D \sim 7 \cdot 10^{-20} \text{ см,}$$

что тоже значительно меньше размеров всех мыслимых объектов.

Таким образом, у макроскопических объектов невозможно наблюдать волновые свойства. Перейдём к объектам малой массы.

3) Электрон после ускорения потенциалом  $\phi$  приобретает импульс  $p = (2me\phi)^{1/2}$ , которому соответствует длина волны



$$\lambda_D = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2me\phi}}.$$

Если разность потенциалов измерять в вольтах, а длину волны — в ангстремах, то справедлива простая формула:

$$\lambda_D = \frac{12.3}{\sqrt{\phi}}.$$

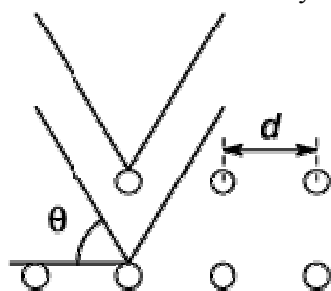
Электрон может проявлять волновые свойства, например, в явлении дифракции на кристалле. Для этого величина  $\lambda_D$  должна быть порядка постоянной решётки кристалла, то есть около 1 Å. Такой длине волны соответствует потенциал  $\phi \sim 100$  В.

#### 5.4 Эксперименты по наблюдению волновых свойств частиц

Выше мы изложили теоретические предпосылки проявления волновых свойств у частиц. Они вовсе не были плодом умозрительных рассуждений. Были проведены опыты, которые установили, что частицы в определённых условиях ведут себя как волны.

##### Формула Вульфа-Брэгга

На рис.(5.4.1) схематически изображена электронная волна, падающая на кристалл под углом скольжения  $\theta$ . Постоянную решётки обозначим  $d$ . Из чертежа ясно, что разность хода  $\Delta$  двух лучей, отражённых от соседних плоскостей, равна



$$\Delta = 2 d \sin\theta.$$

В тех направлениях, где  $\Delta$  равна целому числу длин волн,

$$(4.1) \quad 2d \sin\theta = n \lambda_D$$

наблюдается усиление потока рассеянных электронов.

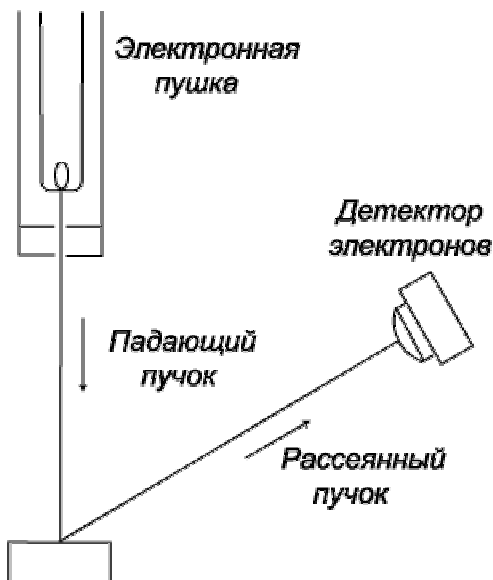
**Рис. 5.4.1. Рассеяние электронов на кристалле.**

Уравнение (4.1), называемое формулой Вульфа-Брэгга, полностью соответствует известному условию максимумов в явлении интерференции при отражении света от тонких плёнок.

##### Дифракция электронов

Пример дифракции электронов приведён в начале этой главы на рис. 5.3.1. Здесь мы изложим основные опыты, которые доказала волновые свойства электронов и других частиц.

Впервые дифракцию электронов наблюдали в 1927 году К. Дэвиссон и Л. Джермер (Нобелевская премия по физике) и годом позднее Тартаковский и Томсон. Ещё раньше, в 1923–25 г.г., в заводской лаборатории Bells Дэвиссон и Кэнсман исследовали рассеяние пучка электронов металлической поверхностью. Схема эксперимента изображена на рис.5.4.2. Полярная диаграмма рассеяния представляла собой более или менее плавную кривую без чётко выраженных особенностей.



Открытию предшествовал «несчастный случай» — разгерметизация установки. После отжига окислившегося кристалла (никель) на кривой рассеяния обозначилась лепестковая структура, которую

**Рис.5.4.2. Эксперимент Дэвиссона-Джермера**

авторам эксперимента удалось объяснить с привлечением формулы Вульфа–Брэгга (4.1) и соотношения де Бройля

$$\lambda_D = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2me\phi}}.$$

Отжиг окислившегося рассеивателя способствовал устранению неоднородностей и очистке кристаллографических плоскостей, при отражении от которых и наблюдалась интерференция электронных волн.

В опытах по дифракции электронов можно менять угол рассеяния  $\theta$  при одной и той же энергии электронов, а также ускоряющее напряжение  $\phi$  при фиксированном значении  $\theta$ . В последнем случае, силу соотношения

$$(4.2) \quad 2d \sin \theta = \frac{nh}{\sqrt{2me\phi}},$$

интерференционный максимум  $n$ -го порядка возникает при соответствующем значении потенциала. На рис. 5.4.3 приведена зависимость силы тока электронов, рассеянных под фиксированным углом  $\theta$ ,

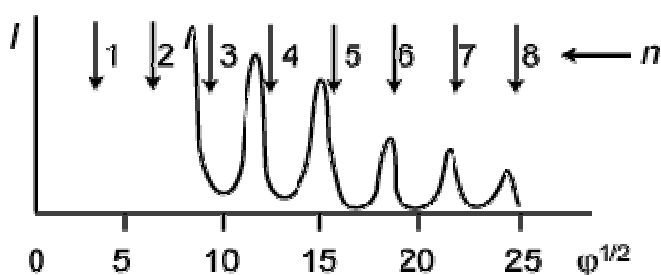


Рис.5.4.3. Проверка формулы Вульфа-Брэгга.

от величины ускоряющего потенциала. Стрелками указаны положения максимумов, рассчитанные по формуле (4.2). Расхождение расчётных и экспериментальных данных при малых значениях  $n$  объясняется тем, что при вычислениях не учитывался показатель преломления для лучей, проникающих внутрь рассеивателя.

Таким образом, экспериментально было доказано, что электроны обладают волновыми свойствами и дают дифракционную картину, аналогичную той, которая наблюдается у рентгеновского излучения. Позднее наблюдалась дифракция других элементарных частиц: протонов и нейтронов.

#### Дифракция атомных и молекулярных пучков

Впервые дифракцию атомов гелия обнаружили в 1930 году Фриш, Штерн и Эстерман. Схема их эксперимента представлена на рис.5.4.4. Из печи с температурой около 800 К выходил пучок атомов гелия, который пропусклся через механический селектор скоростей. Последний представлял собой

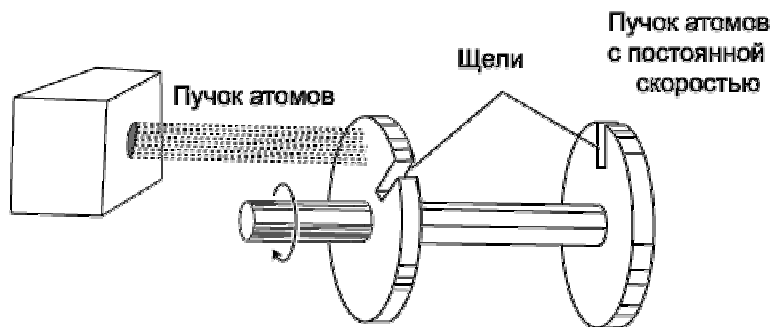


Рис.5.4.4. Получение пучка атомов гелия с постоянной скоростью

два жёстко закреплённых на оси диска с радиальными прорезями, смещёнными по углу вращения на величину  $\Delta\varphi$ . Такой селектор пропускает только те атомы, которые пролетают расстояние между дисками за время, совпадающее с временем поворота дисков на угол  $\Delta\varphi$ . Полученный в селекторе моноскоростной пучок рассеивался под разными углами поверхностью кристалла LiF, постоянная решётки которого близка к  $1\text{Å}$ . Температуру печи  $T$  подбирали так, чтобы дебройлевская длина волны атома гелия

$$\lambda_D = \frac{h}{\sqrt{3M_{\text{He}}T}}$$

мало отличалась от постоянной решётки. Рассеянный пучок атомов регистрировался детектором, чувствительным элементом которого была металлическая полоска, сопротивление которой зависело от давления окружающего газа. На рис.5.4.5 приведена зависимость регистрируемого тока от угла

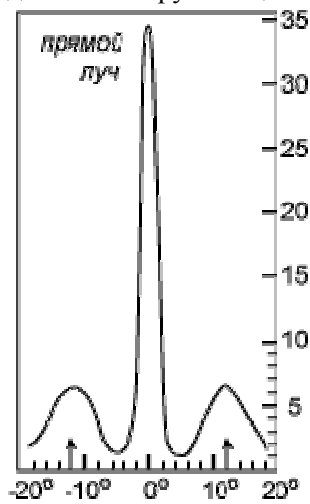


Рис.5.4.5. Дифракция атомов гелия на кристалле фтористого лития.

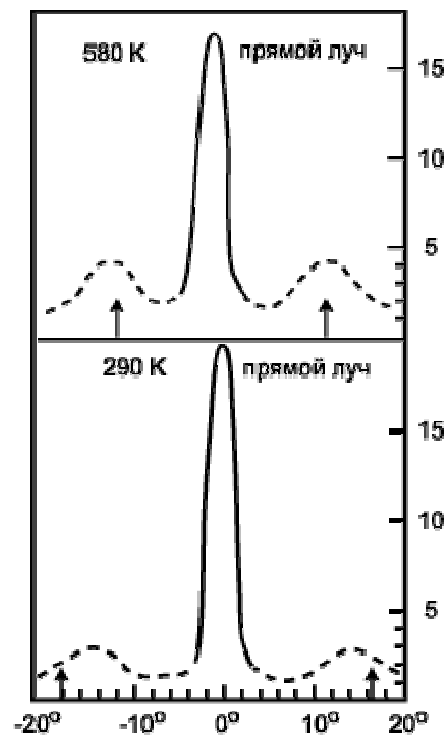


Рис. 5.4.6. Дифракция молекул водорода от кристалла фтористого лития.

рассеяния  $\theta$ . Центральный максимум соответствует пучку, не испытавшему отклонения, боковые — первым интерференционным максимумам. Аналогичная картина наблюдалась для пучков молекул водорода (рис.5.4.6).

Так было доказано, что волновые свойства присущи всем микрочастицам. Дифракция микрочастиц, сыгравшая важную роль в установлении двойственной природы материи, в дальнейшем стала одним из основных методов изучения структуры вещества (электронография, нейтронография).

В заключение отметим, что понятие дебройлевской длины волны электрона позволяет нам осмыслить идею квантования боровских орбит. С точки зрения оптических свойств, электронная волна в электрическом поле ядра распространяется в неоднородной среде. Из оптико–механической аналогии следует, что эффективный показатель преломления для электронной волны убывает с увеличением расстояния от ядра пропорционально квадратному корню из потенциала. Поэтому внешние участки волнового фронта должны перемещаться с большей скоростью, чем внутренние. Это создаёт предпосылки для движения электрона по искривлённой траектории: в случае сферической симметрии — по окружности. Волна, начавшая своё движение по окружности, не погасит сама себя, если она вернётся в исходную точку с тем же самым значением фазы. Иными

словами, на длине окружности должно уложиться целое число длин волн:

$$(4.3) \quad 2\pi r = n\lambda_D = n \frac{h}{mV}.$$

Таким образом, условие (4.3) выделяет «разрешённые» орбиты. Его можно переписать в виде

$$mVr = n \frac{h}{2\pi},$$

представляющем правило квантования орбитального момента электрона.