

Глава 15. Теория Бора–Зоммерфельда

Теория Бора, изложенная в предыдущей главе, отождествляет дискретное состояние атома с энергетическим уровнем. В действительности атом, как всякая квантовая система, может находиться в различных состояниях с одним и тем же значением энергии. С такой ситуацией, называемой *вырождением*, мы уже познакомились в девятой главе, рассматривая одномерное движение свободной частицы. Вырождение заключалось в том, что частица может двигаться с одной и той же скоростью в двух противоположных направлениях. Правда, там же показано отсутствие вырождения в случае ограниченного одномерного движения. Действительно, в задачах о движении частицы в потенциальной яме и её отражения от потенциального барьера вырождение не имело места. Но вращение электрона вокруг ядра не является одномерным, и это в корне меняет ситуацию: состояния атома могут быть вырождены, несмотря на то, что движение связанного электрона в нём ограничено.

Напомним некоторые определения: число разных состояний, принадлежащих одному уровню энергии, называется *степенью вырождения*, или *статистическим весом*, а также просто *весом* уровня. Таким образом, необходимо различать квантовые состояния и энергетические уровни атомов. В модели круговых орбит вырождение отсутствует, так как, согласно (13.3.7), момент вращения электрона однозначно выражается через его энергию.

Интерпретация вырождения в рамках модели Бора была предложена Зоммерфельдом: он ввёл представление о плоских эллиптических орбитах и о пространственном квантовании. В классической механике большая полуось эллипса однозначно связана с энергией движения, в то время как его форма определяется также и моментом вращения. Следовательно, одной и той же энергии при движении по эллипсу могут отвечать разные значения момента. В квантовой теории это свойство классического движения проявляется как вырождение. Перейдём к количественному изложению теории Бора–Зоммерфельда

15.1. Эллиптические орбиты

Известно, что механическая система с k степенями свободы описывается с помощью k обобщённых координат $q_i (i = 1, 2, \dots, k)$ и соответствующих им обобщённых моментов

$$(1.1) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}.$$

Правила квантования Бора–Зоммерфельда гласят: реализуются только те состояния системы, которые удовлетворяют условиям стационарности, при которых сохраняются адиабатические инварианты:

$$(1.2) \quad \oint p_i dq_i = n_i \cdot h, \quad n_i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

В случае круговой орбиты мы получаем прежнее условие (13.1.1). В самом деле, при заданном радиусе движение по окружности есть движение с одной степенью свободы. В качестве единственной обобщённой координаты может быть взят азимут φ , изменяющийся в пределах от нуля до 2π . Кинетическую энергию выражаем через скорость изменения угла:

$$(1.3) \quad T = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Обобщённый импульс

$$(1.4) \quad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$$

представляет собой орбитальный момент M . При равномерном вращении по окружности он сохраняет постоянное значение, отличное от нуля. Условия (1.1) сводятся к

$$\int_0^{2\pi} M d\phi = n \cdot h.$$

Отсюда следует (13.1.1). Обратим внимание на применение двух обозначений для одной и той же величины — квантового числа момента вращения. В главе 12, где исследуются квантовые свойства орбитального момента, мы пользовались буквой l . Но в классической механике момент имеет иные свойства. Поэтому мы приняли разные обозначения для двух аспектов момента:

$$\begin{cases} n_\phi & \text{— для полуклассического подхода,} \\ l & \text{— в квантовой теории.} \end{cases}$$

Перейдём к задаче об эллиптических орбитах. Поместим ядро с зарядом Ze в одном из фокусов эллипса. На рис.15.1.1 правый фокус находится в точке F . В качестве обобщённых координат примем расстояние до центра r и азимутальный угол ϕ . Из аналитической геометрии известно

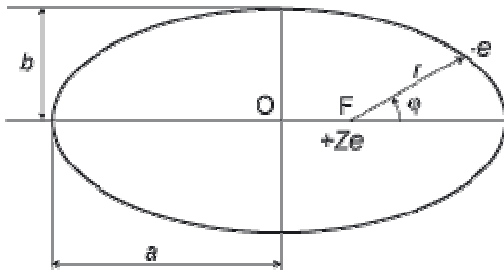


Рис.15.1.1. Движение электрона по эллипсу.

уравнение эллипса с большой полуосью a и эксцентриситетом ϵ :

$$(1.5) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 + \epsilon \cdot \cos \phi}{1 - \epsilon^2}.$$

Эксцентриситет равен расстоянию OF от фокуса F до центра эллипса O , делённому на размер большой полуоси. Перепишем формулу для кинетической энергии с учётом изменения r :

$$(1.6) \quad T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2).$$

Легко убедиться, что уравнение для обобщённого импульса p_ϕ снова сводится к уравнению (13.1.1). Перепишем его, заменив n на n_ϕ :

$$(1.7) \quad M = n_{\varphi} \cdot \hbar .$$

Напомним, что при движении в центрально–симметричном поле сохраняется орбитальный момент вращения. Поэтому величина M в левой части (1.7) остаётся постоянной, как и в случае вращения по окружности.

Вычислим обобщённый момент p_r , соответствующий радиальной координате:

$$(1.8) \quad p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} ,$$

и запишем второе условие стационарности:

$$(1.9) \quad \oint p_r dr = n_r \cdot h .$$

Целые положительные числа n_{φ} и n_r называются, соответственно, азимутальным и радиальным квантовыми числами. Из (1.9) выводится правило квантования эксцентриситета:

$$(1.10) \quad 1 - \varepsilon^2 = \left(\frac{n_{\varphi}}{n} \right)^2 ,$$

где введено обозначение

$$(1.11) \quad n = n_r + n_{\varphi} .$$

Величина n , равная сумме азимутального и радиального чисел, называется *главным квантовым числом*.

Выведем формулу (1.10). Для этого в левой части (1.9) выполним замену переменной:

$$(1.12) \quad \oint p_r dr = 2m \int_0^{\pi} \frac{dr}{dt} \frac{dr}{d\varphi} d\varphi .$$

В записи

$$dr = \frac{dr}{d\varphi} d\varphi$$

мы воспользовались зависимостью (1.5) модуля радиус–вектора от азимутального угла. Отметим, что эта зависимость не является взаимно–однозначной: в силу симметрии эллипса справедливо равенство

$$r(2\pi - \varphi) = r(\varphi) ,$$

то есть, двум значениям угла φ отвечает одно и то же расстояние r . Во время движения электрона по эллипсу приращение dr в точке $2\pi - \varphi$ имеет другой знак, чем в точке φ :

$$dr(2\pi - \varphi) = -dr(\varphi)$$

при тех же самых изменениях dt и $d\varphi$. Вместе с dr становятся отрицательными обе производные: dr/dt и $dr/d\varphi$. Следовательно, подынтегральная функция в правой части (1.12) сохраняет своё значение при зеркальном отражении $\varphi \rightarrow 2\pi - \varphi$. Это оправдывает сделанную нами замену

$$\int_0^{2\pi} \dots d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \dots d\varphi$$

интеграла по полному промежутку $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ его удвоенным значением в промежутке $0 \leq \varphi \leq \pi$. В верхней полуплоскости функция $r(\varphi)$ становится взаимно-однозначной, что облегчает дальнейшие выкладки.

Скорость изменения r выразим через производную $d\varphi/dt$:

$$\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

которая, согласно (1.4), равна $M/(mr^2)$. В результате вычисление второго адиабатического инварианта сводится к интегрированию по углу:

$$\oint p_r dr = 2M \int_0^{\pi} \left(\frac{d \ln r}{d\varphi} \right)^2 d\varphi.$$

Производную $d \ln r / d\varphi$ вычисляем по формуле (1.5) и приходим к окончательному выражению для левой части (1.9):

$$(1.13) \quad \oint p_r dr = 2M\varepsilon^2 \cdot J(\varepsilon),$$

где

$$(1.14) \quad J(\varepsilon) = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi.$$

Упростим подынтегральную функцию. Сначала понизим степень знаменателя ε путём интегрирования по частям,

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

положив

$$u = \sin \varphi, \quad d\nu = \frac{\sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

В результате удаётся понизить степень знаменателя:

$$J(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(-\pi + \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \right).$$

Последний интеграл в скобках вычисляется подстановкой $y = \operatorname{tg}(\varphi/2)$. Он равен

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

откуда следует

$$J(\varepsilon) = \frac{\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right).$$

Подставляя в (1.13) полученное выражение для $J(\varepsilon)$, убеждаемся, что из (1.9) действительно получается (1.10).

Ещё одно алгебраическое уравнение вытекает из условия постоянства полной энергии E . Чтобы вычислить кинетическую энергию, в (1.6) заменим \dot{r} на $\dot{\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$, а $\dot{\varphi}$ выразим через момент вращения M :

$$(1.15) \quad T = \frac{M^2}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{2} + \varepsilon \cdot \cos \varphi \right).$$

В формулу для потенциальной энергии (13.3.3) подставим r из уравнения эллипса (1.5):

$$(1.16) \quad U = -\frac{Ze^2}{a} \cdot \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon^2}.$$

Сложив (1.15) и (1.16), получим выражение для E :

$$(1.17) \quad E = \frac{M^2}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2} \cdot \frac{1 + \varepsilon^2}{2} - \frac{Ze^2}{a(1 - \varepsilon^2)} + \left[\frac{M^2}{ma^2(1 - \varepsilon^2)^2} - \frac{Ze^2}{a(1 - \varepsilon^2)} \right] \varepsilon \cdot \cos \varphi.$$

Конечно, полная энергия имеет постоянное значение, не зависящее от времени, а, следовательно, и от угла φ . Поэтому множитель в квадратных скобках перед $\cos \varphi$ должен равняться нулю. Отсюда получается связь между эксцентриситетом, большой полуосью эллипса и моментом орбитального вращения электрона:

$$(1.18) \quad M^2 = amZe^2(1 - \varepsilon^2).$$

Подставив (1.18) в (1.17), получим окончательное выражение для E :

$$(1.19) \quad E = -\frac{Ze^2}{2a}.$$

Таким образом, полная энергия, как и в случае классического движения, зависит только от большой полуоси.

Правило квантования для большой полуоси

$$(1.20) \quad a_n = \frac{\hbar^2}{mZe^2} n^2$$

вытекает из (13.1.1), (1.10) и (1.18). Сопоставляя (1.20) с (13.5.1), видим, что большие полуоси эллипсов совпадают с радиусами соответствующих круговых орбит, а вместо единственного при круговом движении квантового числа n стоит сумма азимутального и радиального квантовых чисел — главное квантовое число. Малая полуось b зависит от обоих квантовых чисел в отдельности. В самом деле, принимая во внимание, что

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

и подставляя вместо разности $1 - \varepsilon^2$ её значение из (1.10), находим:

$$(1.21) \quad \frac{b}{a} = \frac{n_\varphi}{n}.$$

Выражение для энергии стационарных орбит получаем, подставив в (1.19) вместо a его значение из (1.20):

$$(1.22) \quad E = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \text{Ry},$$

то есть, ту же самую формулу (13.5.2), что и для энергии стационарных круговых орбит. Но вместо числа, связанного с орбитальным моментом, стоит главное квантовое число. Подчеркнём, что их смысл различается коренным образом, несмотря на то, что они обозначаются одной и той же буквой n . Основное различие заключается в том, что главное квантовое число в теории Бора–Зоммерфельда не связано однозначно с моментом вращения: формула (13.3.7) для него лишена смысла.

Эллиптические орбиты не меняют значений энергии стационарных состояний. Вместе с тем остаются в силе и все полученные из анализа круговых орбит выводы, касающиеся спектра

водорода и сходных с ним ионов. Только каждому возможному значению энергии E соответствует не одна, а несколько орбит, различающихся эксцентриситетом. В случае круговых орбит энергия и момент определяются одним и тем же квантовым числом. При движении по эллипсу момент зависит от n_ϕ , а энергия — от n , и между ними нет однозначной связи. Таким образом, представление об эллиптических орбитах позволяет объяснить явление вырождения энергетических уровней в атоме.

Нулевому значению азимутального квантового числа соответствует прямая линия, проходящая через ядро. В классической механике движение по такой траектории невозможно, поэтому мы приходим к выводу, что n_ϕ принимает только положительные значения. Отсюда в силу (1.11) приходим к выводу, что при фиксированной величине квантового числа n азимутальное и радиальное квантовые числа могут принимать следующие ряды значений:

$$(1.23) \quad \begin{aligned} n_\phi &= 1, 2, 3, \dots, n-1, n, \\ n_r &= n-1, n-2, n-3, \dots, 1, 0. \end{aligned}$$

Сравнение (1.23) с формулой (12.1) из двенадцатой главы показывает различие между величинами n_ϕ и l , по-разному описывающими одно и то же физическое явление. В квантовой теории, в отличие от классической механики, момент электрона на орбите может быть равен нулю. В силу соотношения неопределённостей Гейзенберга никакого падения электрона на ядро при этом не происходит.

Итак, при заданной энергии E возможны n орбит разной формы. Чисто круговое движение имеет место, если n_ϕ принимает максимально возможное значение, равное n , а наиболее вытянутый эллипс получается при $n_\phi = 1$. На рис.15.1.2 представлены три орбиты, соответствующие $n=3$. Цифрами указаны значения азимутального квантового числа n_ϕ .

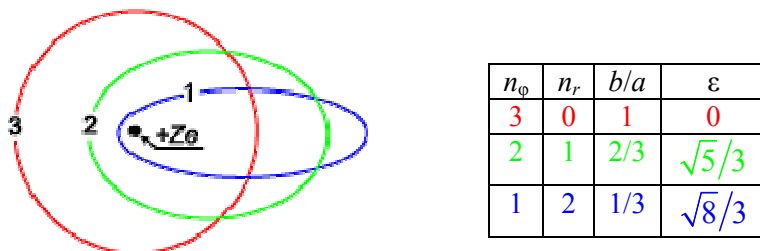


Рис.15.1.2. Орбиты электрона при $n=3$.

Численные значения параметров собраны в таблице. Цвет строки таблицы соответствует цвету кривой на рисунке.

Итак, энергия атома водорода в рассматриваемом приближении не зависит от орбитального момента. Полученный результат не распространяется на все остальные атомы, но справедлив только при движении в чисто кулоновском поле. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в литературе принято говорить о *кулоновском*, или *случайном* вырождении. Особая роль кулоновского поля, как мы убедимся в следующей главе, проявляется и в квантовой механике, где энергия атома также не зависит от момента. Кулоновское вырождение (в нерелятивистском приближении) выделяет атом водорода и водородоподобные ионы среди всех других атомных систем. С физической точки зрения это объясняется более высокой симметрией движения в поле, где потенциал падает обратно пропорционально расстоянию от центра, по сравнению с общим случаем центрально-симметричного поля.

Кулоновское вырождение снимается несколькими процессами. Один из них — рассмотренная в главе 13 зависимость массы электрона от скорости в многозарядных ионах. В

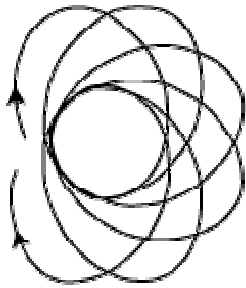


Рис.15.1.3
Прецессирующая орбита

классической задаче Кеплера она приводит к возникновению *прецессии*: электрон начинает двигаться по незамкнутой траектории, имеющей вид розетки, как на рис.15.1.3. Такая траектория возникает при медленном вращении эллипса вокруг фокуса с постоянной угловой скоростью.

Но существует вырождение, которое имеет место у всех атомов, — вырождение по проекции момента на произвольную ось. В самом деле, если атом не помещён во внешнее поле, то его энергия не должна зависеть от ориентации в пространстве и, следовательно, от проекции любого вектора, в том числе, вектора орбитального момента. В полуклассической теории Зоммерфельда вырождение по проекции момента объясняется в рамках модели пространственного квантования.

15.2. Пространственное квантование

Под влиянием внешнего поля — магнитного или электрического, — орбита электрона перестаёт быть плоской. Движение электрона становится трёхмерным и стационарные орбиты должны удовлетворять уже не двум, а трём квантовым условиям. Для удобства сопоставления с формулами первой главы, описывающими магнитные свойства атомов, в этом разделе считаем ядро бесконечно тяжёлым и, таким образом, не делаем различия между массой электрона m_e и приведённой массой m .

Рассмотрим случай, когда внешнее поле можно считать малым по сравнению с полем ядра, а следовательно, невелико и изменение орбиты. Тогда орбита представляет собой прежний эллипс, а положение плоскости эллипса в пространстве определяется величиной и направлением внешнего поля. На рис. 15.2.1 введём сферические координаты r , θ , φ .

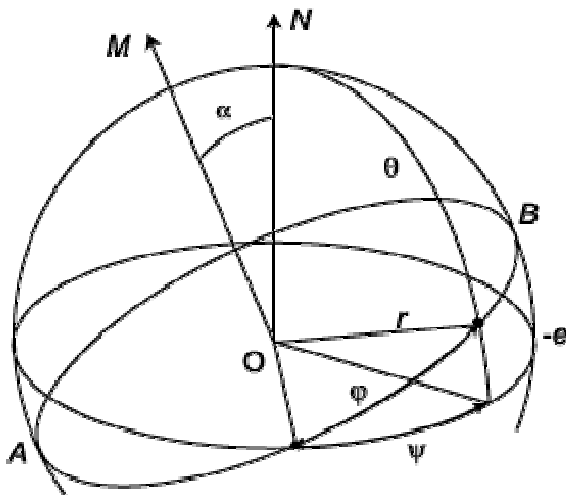


Рис.15.2.1. Пространственное квантование орбиты.

Пусть ON — направление внешнего поля; OM — нормаль к электронной орбите AB , составляющая угол α с прямой ON . Кроме того, введём азимут φ , отсчитанный в плоскости орбиты. Полагая возмущение слабым, согласно сделанному предположению, будем считать справедливым правило

квантования момента (1.7), выведенное нами для плоской орбиты. С другой стороны, в сферических координатах должны выполняться квантовые условия:

$$(2.1) \quad \oint p_r dr = n_r h, \quad \oint p_\theta d\theta = n_\theta h, \quad \oint p_\psi d\psi = n_\psi h.$$

Здесь p_ψ — момент, соответствующий азимуту ψ , отсчитанному в экваториальной плоскости. Из рисунка ясно, что p_ψ есть проекция вектора орбитального момента M на направление внешнего поля ON :

$$(2.2) \quad p_\psi = M \cos \alpha.$$

Как и момент, его проекция сохраняется во время движения, поэтому последнее из правил квантования (2.1) даёт:

$$(2.3) \quad p_\psi = n_\psi \frac{h}{2\pi} = n_\psi \hbar.$$

Сравнивая (1.7), (2.2) и (2.3), находим:

$$n_\psi = n_\phi \cos \alpha.$$

Угол α и проекция момента p_ψ выражаются через n_ψ следующим образом:

$$(2.4) \quad \cos \alpha = \frac{n_\psi}{n_\phi}, \quad p_\psi = \frac{n_\psi}{n_\phi} p_\phi.$$

Так как $|\cos \alpha| \leq 1$, то n_ψ при заданном n_ϕ может принимать следующий ряд значений:

$$(2.5) \quad n_\psi = -n_\phi, -n_\phi + 1, \dots, 0, \dots, n_\phi - 1, n_\phi.$$

Таким образом, момент вращения может располагаться ровно $2n_\phi + 1$ различными способами по отношению к некоторому выделенному направлению, например, к вектору индукции магнитного поля. При отсутствии внешнего поля состояние с известной величиной момента является вырожденным с весом $2n_\phi + 1$. Полученный результат не зависит от формы потенциала и, в отличие от кулоновского вырождения, имеет место у каждого изолированного атома.

Сравним формулу (2.5), полученную полуклассическим путём, с результатом (12.3.5b) квантовой теории. Легко убедиться, что первая получается из второй простой заменой n_ϕ на l и n_ψ на магнитное квантовое число m . В этом пункте результаты классического и квантового подходов почти совпадают. Различие заключается в следующем: классическая теория описывает *малые* возмущения плоской орбиты, а в квантовой механике связь (13.3.5) орбитального момента с его проекцией *справедлива всегда*.

15.3. Эффект Зеемана.

Снятие вырождения по проекции момента приводит к *эффекту Зеемана* — расщеплению спектральных линий во внешнем магнитном поле. Из (1.3.3), (2.4) и (2.7) следует правило квантования потенциальной энергии при взаимодействии атома с магнитным полем:

$$(3.1) \quad \Delta U = m\mu_0 H, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_\varphi.$$

Изложим классический аспект эффекта Зеемана. Для этого сначала покажем, что внешнее магнитное поле вызывает *ларморовскую прецессию* — вращение электронной орбиты вокруг направления поля с постоянной угловой скоростью

$$(3.2) \quad \Omega_H = \frac{eH}{2m_e c}.$$

Наглядное представление о прецессии орбиты даёт рис.15.3.1.

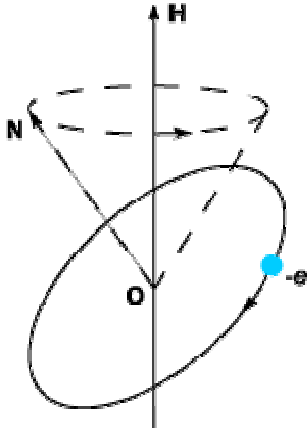


Рис.15.3.1. Прецессия орбиты.

На электрон, движущийся в магнитном поле со скоростью \mathbf{v} , действует сила Лоренца

$$\mathbf{f}_H = -\frac{e}{c}[\mathbf{vH}].$$

Будем считать, что величина Ω_H значительно меньше частоты обращения электрона на орбите. Перейдём в систему координат, вращающуюся вокруг \mathbf{H} с угловой скоростью Ω_H . В неинерциальной системе на электрон действуют центробежная сила $m_e \Omega_H^2 r$ и сила Кориолиса

$$\mathbf{f}_K = 2m_e[\mathbf{v}\Omega_H].$$

Подставив сюда (3.2), получим

$$\mathbf{f}_K = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] = -\mathbf{f}_H,$$

то есть сила Кориолиса уравнивает силу Лоренца. Сделанное выше предположение о малости Ω_H позволяет пренебречь центробежной силой, пропорциональной квадрату малой величины. Итак, во вращающейся системе координат орбита электрона останется прежним эллипсом, а относительно неподвижной — эллипсом, прецессирующим с частотой Ω_H .

Разделив энергию взаимодействия (3.1) на постоянную Планка, приходим к выводу, что спектральная линия в магнитном поле расщепляется на несколько компонент. Смещение частот между компонентами $\Delta\omega$ равно целому числу Ω_H . Для $\Delta m = 1$ величина $\Delta\omega$ равна

$$(3.3) \quad \Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e c} H.$$



Смещение линий в оптическом диапазоне принято выражать в шкале длин волн. Из формулы (3.3) с учётом $\lambda = c/\nu$ следует:

$$(3.4) \quad \Delta\lambda = \pm \frac{1}{4\pi c^2} \frac{e}{m_e} \lambda^2 H.$$

Величина $\Delta\lambda$ в условиях звёздных атмосфер и межзвёздной среды значительно меньше длины волны. Например, в среднем по солнечной фотосфере можно принять оценку $H=1000$ Гс. Для линий с длиной волны около 5000\AA расщепление составит $\Delta\lambda \approx 0.01\text{\AA}$.

Количество наблюдаемых компонент определяется весом нижнего и верхнего уровней перехода, а также *правилом отбора*. Самыми яркими являются переходы, удовлетворяющие *правилам отбора* для дипольного излучения. Сведения о них приведены в табл.15.3.1:

Таблица 15.3.1. Правила отбора для магнитного квантового числа.

Δm	Обозначение	Поляризация	
0	π	Линейная вдоль вектора магнитного поля	
+1	σ	Круговая в плоскости, перпендикулярной H	
-1	σ		

Такие переходы называются «разрешёнными». Интенсивность компонент с другими комбинациями магнитных чисел значительно ниже — на несколько порядков величины. На рис.(15.3.2) приведён случай, когда азимутальное квантовое число нижнего уровня равно двум, а верхнего — трём. При наблюдении в направлении, перпендикулярном к магнитному полю

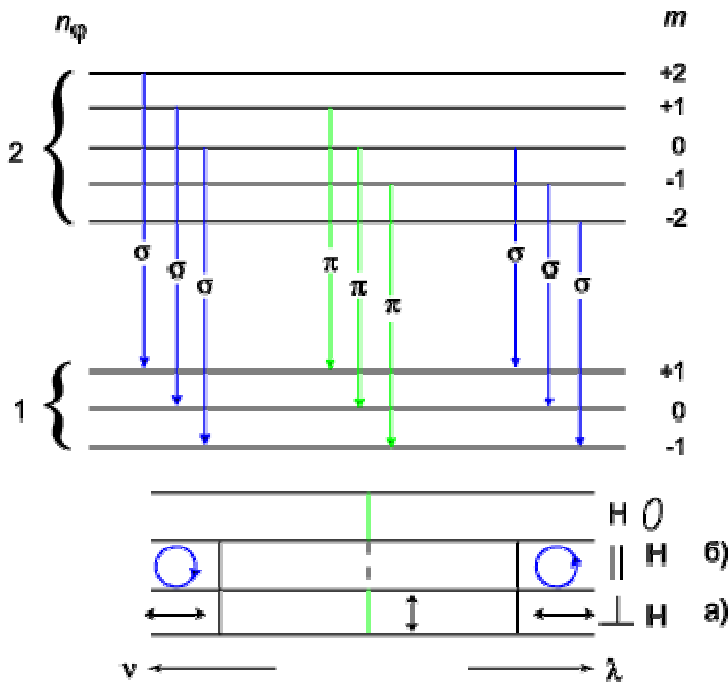


Рис.15.3.2. Расщепление спектральной линии в магнитном поле.

(случай а), круговые колебания проектируются в виде линейных, так что спектральная линия расщепляется на три линейно поляризованных составляющих — среднюю, с электрическим вектором волны вдоль поля, и крайние, с колебаниями поперёк поля. При наблюдении вдоль поля (случай б) средняя составляющая пропадает, а две оставшиеся поляризованы по кругу: смещённая

в красную сторону спектра — против часовой стрелки и смещённая в фиолетовую — по часовой стрелке.

Характер поляризации компонент в классической механике объясняется в модели пространственного осциллятора — механической системы, совершающей гармонические колебания по трём координатам: x , y и z . Для определённости будем иметь в виду электрон в поле упругих сил. Вектор \mathbf{r} отклонения частицы от положения равновесия удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \cdot \mathbf{r} = 0,$$

где ω_0 — собственная частота осциллятора. Поместим осциллятор во внешнее магнитное поле, которое мы будем полагать однородным и постоянным. Ось z направим вдоль поля. Уравнения вынужденных колебаний осциллятора имеют вид:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\omega_H \dot{y}, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= \omega_H \dot{x}, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0. \end{aligned}$$

Здесь мы ввели циклотронную частоту ω_H , равную

$$\omega_H = \frac{eH}{m_e c}.$$

Первые два уравнения (3.5) не содержат z , а в третьем отсутствуют x и y . Отсюда следует, что колебания вдоль поля остаются неизменными. Рассмотрим движение в плоскости xu . Введём комплексную переменную

$$\xi = x + iy.$$

Умножая второе уравнение на мнимую единицу, и складывая его с первым, получаем

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -i\omega_H \dot{\xi}.$$

Последнее уравнение сводится к алгебраическому подстановкой

$$\xi = \exp(i\omega t),$$

описывающей вращение с частотой $\omega > 0$ против часовой стрелки. Для искомого параметра ω получается квадратное уравнение

$$\omega^2 + \omega_H \omega - \omega_0^2 = 0,$$

положительное решение которого равно

$$\omega_+ = \frac{1}{2} \omega_H + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \omega_H^2}.$$

Отрицательный корень отвечает вращению по часовой стрелке. Этому направлению отвечает другая комплексная переменная:

$$\eta = x - iy.$$

Проводя аналогичные вычисления, получаем положительное решение

$$\omega_- = -\frac{1}{2}\omega_H + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_H^2}.$$

Если ω_H значительно меньше собственной частоты осциллятора, то

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega_H.$$

Мы повторили результат (3.3), но с другой точки зрения, попутно объяснив поляризацию компонент линии.

Расщепление линий в магнитном поле было предсказано Лоренцом задолго до появления квантовой теории и экспериментально проверено Зееманом. Схема опыта Зеемана приведена на рис.15.3.3.

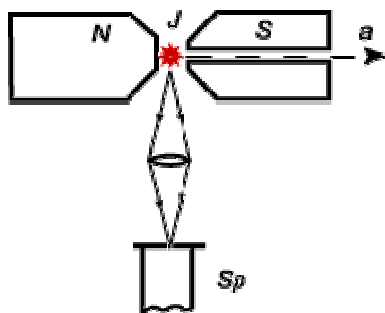


Рис.15.3.3. Схема опыта Зеемана.

Здесь J — источник света, помещённый между полюсами электромагнита, Sp — щель спектрографа. На рисунке наблюдения ведутся в направлении, перпендикулярном полю. В этом случае наблюдаются линейно поляризованные π - и σ -составляющие. Если же наблюдать излучение вдоль линии Ja , то видны две циркулярно поляризованные σ -компоненты.