

Глава 4. Корпускулярные свойства излучения

В нашем повседневном опыте свойства волн и частиц чётко разделяются. Но в масштабах атомов проявляется так называемый корпускулярно–волновой дуализм: частицы проявляют волновые свойства, а волны — свойства частиц. В этой главе рассмотрены два явления, в которых излучение проявляет свойства частиц: неупругое взаимодействие с атомами — фотоэффект и явление отдачи в комптоновском рассеянии. Оба эти явления играют важную роль в астрофизике. Фотоэффект формирует спектры газовых туманностей и звёзд многих типов, а комптоновское рассеяние — спектры ярких активных источников.

4.1 Фотоэффект

Явление фотоэффекта было обнаружено в 1887 г. немецким физиком Г. Герцем. Первые фундаментальные исследования выполнены А.Г. Столетовым в 1888 г., а затем в Германии — Ф. Ленардом (1899 г.). Открытие фотоэффекта позволило сделать следующий шаг на пути к созданию квантовой теории света после гипотезы Планка. Планк первоначально полагал, что квант — это порции энергии, которыми обмениваются квантованные осцилляторы с полем излучения, и только в 1905 г. Эйнштейн сформулировал представление о квантах, как о частицах, летящих со скоростью света и имеющих энергию $\hbar\omega$.

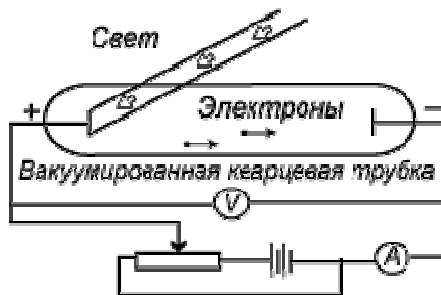


Рис. 4.1.1.
Схема опыта по изучению фотоэффекта.

В схеме на рис. 4.1.1 подаётся напряжение, препятствующее прохождению тока в трубке. Окошко освещалось излучением определённой интенсивности и частоты, что приводило к испусканию облучаемой поверхностью металла электронов и появлению электрического тока. Приходилось увеличивать запирающее напряжение, чтобы ток прекратился. Таким образом, можно было получить вольт–амперные характеристики прибора: зависимость тока от запирающего напряжения при различных степенях освещённости катода и частоты падающего света. Выделим четыре закономерности фотоэффекта.

I. Увеличиваем освещённость W катода светом фиксированной частоты, при этом растёт сила тока. Однако существует определённое значение запирающего напряжения, которому отвечает прекращение тока при любом значении W . На рис.4.1.2 изображены

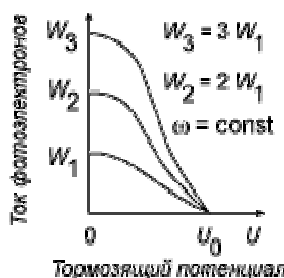


Рис.4.1.2.
Разные освещённости
при одной и той же частоте.

три кривые, соответствующие разным значениям освещённости: $W_1 < W_2 < W_3$. Все они сходятся на оси абсцисс в одной точке U_0 .

II. Меняем частоту света ω , сохраняя постоянную освещённость (рис. 4.1.3).

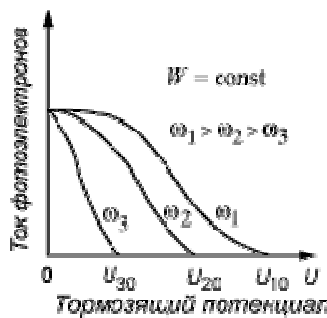


Рис. 4.1.3. Разные частоты при одной освещённости.

При малых значениях запирающего напряжения в трубке текут одинаковые токи при разных частотах. Затем кривые расходятся, и меньшей частоте соответствует меньшее значение напряжения, при котором ток полностью прекращается.

III. Измеренная максимальная энергия электронов T линейно зависит от частоты падающего излучения, что иллюстрируется рис.4.1.4. Величина T пропорциональна

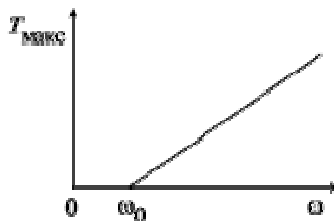


Рис. 4.1.4. Максимальная энергия фотоэлектрона

разности $\omega - \omega_0$, где ω_0 — частота, определяющая «красную границу» фотоэффекта: излучение с частотой $\omega < \omega_0$ не может вызвать ток даже при самой сильной освещённости.

Линейная зависимость энергии вылетающего электрона от частоты необъяснима с точки зрения классической механики. В самом деле, в поле электромагнитной волны напряжённость электрического поля E и, следовательно, скорость v раскачиваемого им электрона зависят от времени по гармоническому закону $\exp(-i\omega t)$. Из второго закона Ньютона

$$m\dot{v} = eE$$

следует

$$v = i \frac{eE}{m\omega}.$$

Таким образом, кинетическая энергия должна падать обратно пропорционально квадрату частоты, в явном противоречии с экспериментом.

IV. Реакция катода на облучение светом практически мгновенна: измеренное время задержки заведомо меньше 10^{-9} с при потоке облучающего света не выше 10^{-10} Вт/см². Этот факт также необъясним с точки зрения классической механики. Поясним сказанное. На рис.4.1.5 изображена



кристаллическая структура вещества катода. Расстояние между узлами решётки составляет около 1Å . Пусть поток падающего на катод излучения равен

$$F = 10^{-10} \text{ Вт/см}^2 = 10^{-3} \text{ эрг/}(\text{см}^2 \text{ с}) = 10^9 \text{ эВ/}(\text{см}^2 \text{ с}).$$

Предположим, что электромагнитная волна у каждого атома кристаллической решетки отрывает по одному электрону и проникает на глубину порядка длины волны излучения $\lambda \sim 1000 \text{ Å}$, то есть, на тысячу слоёв кристалла. На квадратный сантиметр одного слоя приходится 10^{16} атомов. Таким образом, падающий на квадратный сантиметр световой поток распределяется между $N = 10^{19}$ атомами. Если каждый атом отдаёт в фототок по одному электрону, то скорость приобретения энергии электроном составляет $F/N = 10^{-10} \text{ эВ/с}$. Для того, чтобы электрон мог покинуть металл, ему надо совершить работу выхода A порядка одного электронвольта. На это потребуется 10^{10} секунд, то есть 300 лет, в явном противоречии с экспериментом. Противоречие останется и в том случае, если предположить, что излучение освещает лишь внешний слой кристалла. Правда, скорость набора энергии возрастает в тысячу раз, но всё равно время задержки будет и здесь чрезмерно большим — порядка четырёх месяцев.

Все вышеприведённые трудности снимаются, если представить поток излучения с частотой ω в виде корпускул, летящих со скоростью света. Каждая корпускула имеет энергию $\hbar\omega$. Фотон при фотоэффекте пропадает, передавая свою энергию атому, главным образом — электрону. Линейная зависимость энергии электрона T от частоты ω (третий пункт) оказывается следствием закона сохранения энергии:

$$(1.1) \quad T = \hbar\omega - A = \hbar\left(\omega - \frac{A}{\hbar}\right) = \hbar(\omega - \omega_0),$$

где $A = \hbar\omega_0$. Если плотность числа фотонов составляет $N_{\text{ф}}$, то освещённость равна

$$W = \omega \cdot c \cdot N_{\text{ф}}.$$

Ток в трубке растёт при увеличении освещённости, но только при условии, что энергия кванта больше работы выхода. Таким образом, получают объяснение пункты I и II. Пункт IV в гипотезе квантов отражает тот факт, что фотон взаимодействует ровно с одним атомом, а не с целым ансамблем.

Роль атомного ядра.

В формуле (1.1) не просматривается явно роль атомного ядра, точнее, атомного остатка — ядра и оставшихся с ним электронов. На первый взгляд может показаться, что атомное ядро является излишним в рассматриваемой модели: оптический электрон сам поглощает энергию фотона и преодолевает энергетический барьер, равный работе выхода A . Тем не менее, третья частица необходима, иначе не будет выполнен закон сохранения импульса. Покажем, что, например, невозможна реакция

$$\gamma + e^- \rightarrow e^{-*},$$

в которой квант поглощается уединённым электроном. Запишем законы сохранения энергии E и импульса \mathbf{p} для замкнутой системы «квант + электрон». Напомним известные выражения для E и \mathbf{p} как функции скорости \mathbf{v} :

$$(1.2a) \quad \begin{aligned} E &= \gamma m_e c^2, \\ \mathbf{p} &= \gamma m_e \mathbf{v}, \end{aligned} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Из них можно получить энергию как функцию квадрата момента:

$$(1.2b) \quad E^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4.$$

Запишем уравнение, выражающее закон сохранения энергии. До столкновения энергия фотона равна $\hbar\omega$, а энергия электрона равна энергии покоя $m_e c^2$. После столкновения фотон исчезает:

$$\begin{aligned} \hbar\omega + m_e c^2 &= \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \\ \hbar\mathbf{k} &= \mathbf{p} \end{aligned}.$$

Второе уравнение гласит, что электрон до столкновения покоится. Возведя первое уравнение в квадрат и подставив в него $\hbar^2 k^2$ вместо p^2 (что является следствием второго уравнения) приходим к бессмысленному результату:

$$\omega = 0.$$

Он имеет простое объяснение: электрон и фотон не могут иметь одновременно одинаковые значения импульса и энергии. Особенно ясно это видно на примере нерелятивистского электрона, энергия, импульс и скорость которого связаны известной формулой:

$$E = p v / 2.$$

Напомним соотношение между энергией и импульсом фотона как частицы, масса покоя которой равна нулю:

$$E_\phi = p_\phi c.$$

Отсюда следует

$$\frac{E}{E_\phi} = \frac{1}{2} \frac{p}{p_\phi} \frac{v}{c}.$$

Из последней формулы хорошо видно, что, действительно, при $v \ll c$ равные значения энергии электрона и фотона возможны только в случае $p \gg p_\phi$.

Запишем законы сохранения для системы из трёх частиц: фотона, электрона и ядра.

$$(1.3a) \quad \hbar\omega = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2m_e} + A.$$

$$(1.3b) \quad \hbar\mathbf{k} = \mathbf{P} + \mathbf{p}$$

Здесь \mathbf{P} и M , — соответственно, импульс и масса ядра. Важно, что ядро на три порядка величины тяжелее электрона:

$$(1.4) \quad M > 1836 m_e.$$

Это делает возможным одновременное выполнение двух неравенств:

$$(1.5a) \quad \frac{P^2}{2M} \ll \hbar\omega,$$

и

$$(1.5b) \quad P \gg \hbar k.$$

Первое из них — (1.5a) — позволяет не учитывать ядро в уравнении энергии и сводит (1.3a) к (1.1a). Хотя импульсы электрона p и ядра P в (1.3b) значительно превосходят импульс фотона $\hbar k$ по абсолютной величине, но векторы \mathbf{P} и \mathbf{p} направлены в *разные стороны* и их сумма может быть равна малому по величине вектору \mathbf{k} . Итак, ядро компенсирует большую часть импульса электрона, практически не забирая энергию кванта.

4.2 Эффект Комптона

А. Комптон в 1922–23 г.г. проводил опыты по рассеянию рентгеновских лучей на свободных электронах. Он показал, что в результате рассеяния длина волны излучения увеличивается, при этом проведённые им рассуждения подтвердили корпускулярную теорию света. Рассмотрим теорию эффекта Комптона для случая первоначально покоящегося электрона. На рис. 4.2.1 изображены

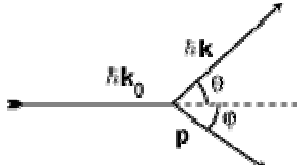


Рис. 4.2.1. Рассеяние фотона на покоящемся электроне

направления импульсов фотона и электрона. Обозначим посредством θ угол между импульсами фотона до и после столкновения (угол рассеяния). Пусть ω_0 и ω обозначают, соответственно, частоту падающего и рассеянного излучения. Аналогичные обозначения примем для волновых векторов \mathbf{k}_0 и \mathbf{k} . Импульс электрона после удара обозначим \mathbf{p} . Напомним, что в релятивистской механике энергия электрона E , как и всякой частицы с отличной от нуля массой покоя выражается через модуль импульса p следующим образом:

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_e c^2)^2.$$

Запишем уравнения, выражающие законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_0 + m_e c^2 &= \hbar\omega + \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \\ \hbar\mathbf{k}_0 &= \hbar\mathbf{k} + \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Слагаемое $m_e c^2$ в левой части первого уравнения равно энергии покоя электрона.

Уединим радикал в правой части первого уравнения, а во втором уравнении перенесём $\hbar\mathbf{k}$ в левую часть. После этого возводим в квадрат оба уравнения и второе умножаем на c^2 . Теперь в уравнения входит угол рассеяния и модуль импульса:

$$\begin{aligned} \hbar^2 \omega_0^2 - 2\hbar^2 \omega_0 \omega + \hbar^2 \omega^2 + 2\hbar(\omega_0 - \omega)m_e c^2 + m_e^2 c^4 &= p^2 c^2 + m_e^2 c^4 \\ \hbar^2 \underbrace{k_0^2 c^2}_{\omega_0^2} - 2\hbar^2 \underbrace{k_0 k c^2}_{\omega_0 \omega} \cos \theta + \hbar^2 \underbrace{k^2 c^2}_{\omega^2} &= p^2 c^2. \end{aligned}$$

Вычтем первое уравнение системы из второго и, учитывая связь

$$\omega = kc$$

между частотой и волновым числом, получим:

$$(2.1) \quad \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0 \omega} = \frac{\hbar}{mc^2} (1 - \cos \theta).$$

Из последней формулы следует, что относительное изменение частоты (следовательно, и энергии кванта) по порядку величины равно отношению первоначальной энергии кванта к энергии покоящегося электрона:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \sim \frac{\hbar \omega_0}{mc^2}.$$

Значительное изменение частоты произойдёт в том случае, если энергия кванта сравнима с энергией покоя электрона:

$$\hbar \omega_0 \sim mc^2 \sim 511 \text{ кэВ}.$$

Энергии mc^2 соответствует комптоновская длина волны:

$$(2.2) \quad \Lambda_C = h/(mc) = 2.42631 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}.$$

Она отличается множителем 2π от введённой ранее $\tilde{\lambda}_C$:

$$(2.3) \quad \Lambda_C = 2\pi \tilde{\lambda}_C.$$

С помощью Λ_C можно упростить (2.1):

$$(2.4) \quad \lambda - \lambda_0 = \Lambda_C (1 - \cos \theta).$$

Наибольшее увеличение длины волны, на $2\Lambda_C$, происходит при рассеянии назад, на угол $\theta = \pi$. Величина комптоновского смещения мала, поэтому его можно наблюдать только в коротковолновом диапазоне — рентгеновского или γ -излучения.

При рассмотрении эффекта Комптона мы оперировали с фотоном, как с частицей — рассматривали его взаимодействие с электроном как столкновение бильярдных шаров. Когда же после рассеяния мы определяли длину волны, например по дифракции, то оперировали с фотоном, как с волной. Таким образом, корпускулярные и волновые характеристики излучения следуют непосредственно друг за другом. Одновременно же проявлять волновые и корпускулярные свойства фотон не может. Как мы увидим в дальнейшем, это связано с соотношением неопределенностей Гейзенберга.

На рис. 4.2.2 представлены спектры комптоновского рассеяния линии серебра $\lambda_0 = 0.56267 \text{ \AA}$ (верхний график слева) при фиксированном значении угла рассеяния для различных веществ.

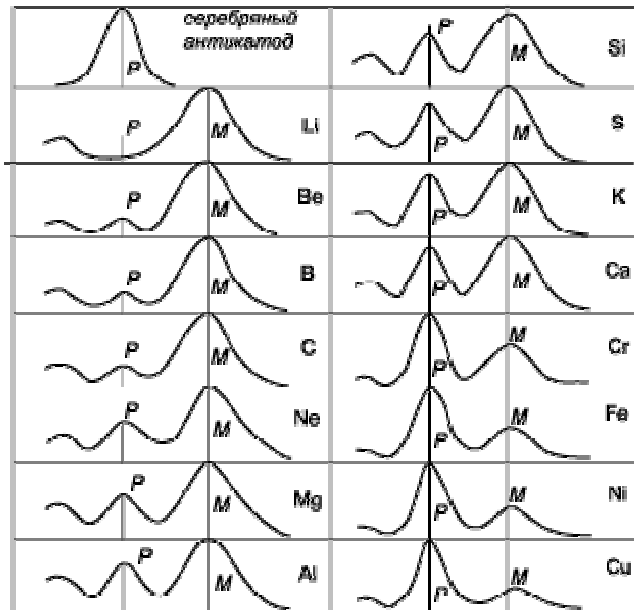


Рис. 4.2.2. Зависимость спектра рассеиваемых фотонов от заряда ядра рассеивателя.

Величина смещения $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, в согласии с формулой (2.4), не зависит от материала мишени, так как рассеяние происходит на свободных электронах.

Комптоновское рассеяние, в отличие от рассмотренного выше фотоэффекта, явно показывает роль ядра и окружающих его электронов внутренних оболочек. Наряду со смещённой длиной волны λ (правый пик М), присутствует пик первичного излучения Р, интенсивность которого растёт с увеличением заряда ядра Z элемента рассеивателя. Появление несмещённого пика обусловлено рассеянием на электронах внутренних оболочек. Они жёстко связаны с ядром, так что импульс фотона передаётся всей массе атома. Учитывая, что смещение $\Delta\lambda$ обратно пропорционально массе рассеивателя, приходим к выводу, что усиление несмещённой компоненты с ростом Z связано с увеличением доли внутренних оболочек.

4.3 Обратное комптоновское рассеяние.

Выше мы рассмотрели столкновение фотона с неподвижным электроном, когда фотон теряет энергию, а электрон её приобретает. Если же электрон первоначально двигался, то становится возможной передача фотону кинетической энергии электрона. Такое взаимодействие принято называть «обратным комптоновским рассеянием». Обобщим формулу (2.4), связав изменение частоты излучения не только с углом рассеяния θ , но и с параметрами движения электрона.

Скорость электрона обозначим v . Введём «гамма-фактор»

$$(3.1) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Значения всех величин до столкновения пометим индексом «0». Направление импульсов фотона до столкновения \mathbf{k}_0 и после рассеяния \mathbf{k} измеряем относительно импульса \mathbf{p}_0 невозмущённого электрона. Угол между \mathbf{k}_0 и \mathbf{p}_0 на рис. 4.3.1 обозначим α_0 ,

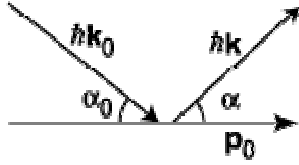


Рис. 4.3.1. Импульсы
электрона и фотона.

а между \mathbf{k} и \mathbf{p}_0 — α . Расчёты ведём в рамках 4-мерных векторов. Так, импульс электрона состоит из «пространственной» компоненты \mathbf{p} и «временной» $\gamma m_e c$. Аналогичные компоненты импульса фотона равны $\hbar \mathbf{k}$ и $\hbar \omega/c$. Квадрат 4-мерного вектора

$$(3.2) \quad a_4 = \{\mathbf{a}, b\}$$

в метрике специальной теории относительности равен

$$(3.3) \quad (a_4 \cdot a_4) = a^2 - b^2.$$

Система уравнений, выражающая законы сохранения энергии и импульса, в четырёхмерной форме выглядит следующим образом:

$$(3.4) \quad p_{04} + \hbar k_{04} = p_4 + \hbar k_4.$$

Выпишем явные выражения для четырёхмерных векторов, входящих в это уравнение:

$$(3.5) \quad p_4 = \{\gamma m_e \mathbf{v}, \gamma m_e c\},$$

$$(3.6) \quad k_4 = \{\mathbf{k}, \omega/c\}.$$

Из (3.5) и (3.6) следует

$$(3.7) \quad (p_4 \cdot p_4) = (p_{04} \cdot p_{04}) = -m_e^2 c^2, \quad (k_4 \cdot k_4) = (k_{04} \cdot k_{04}) = 0.$$

Возведя (3.4) в квадрат и учитывая (3.7), получим полезное тождество:

$$(3.8) \quad (p_4 \cdot k_4) = (p_{04} \cdot k_{04}).$$

С его помощью можно исключить из (3.4) неизвестный вектор p_4 . Для этого скалярно умножим (3.4) на k_4 :

$$(p_4 \cdot k_4) = (p_{04} \cdot k_4) + \hbar (k_{04} \cdot k_4).$$

и в полученное уравнение подставим (3.8):

$$(3.9) \quad (p_{04} \cdot k_{04}) = (p_{04} \cdot k_4) + \hbar (k_{04} \cdot k_4).$$

Скалярные произведения четырёхмерных векторов раскрываются следующим образом:

$$(p_{04} \cdot k_{04}) = p_0 \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha_0 / c - \gamma_0 \cdot m_e \cdot \omega_0,$$

$$(p_{04} \cdot k_4) = p_0 \cdot \omega \cdot \cos \alpha / c - \gamma_0 \cdot m_e \cdot \omega,$$

$$(k_{04} \cdot k_4) = \omega_0 \omega (\cos \theta - 1) / c^2.$$

Подставим их в (3.9) и сократим полученное выражение на $m \gamma_0$:

$$\omega_0 \beta_0 \mu_0 - \omega_0 = \beta_0 \omega \mu - \omega + \hbar \omega_0 \omega (\cos \theta - 1) / (\gamma_0 m_e c^2).$$

Здесь введены обозначения

$$\mu_0 = \cos(\alpha_0), \quad \mu = \cos(\alpha).$$

Теперь приходим к окончательной формуле для изменения частоты при комптоновском рассеянии:

$$(3.10) \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1 - \mu_0 \beta_0}{1 - \mu \beta_0 + \frac{\hbar \omega}{\gamma_0 m_e c^2} (1 - \cos \theta)}.$$

Полученный результат обобщает формулу (2.4) и справедлив при любых скоростях электрона до столкновения. Множитель γ_0 перед $m_e c^2$ объясняется увеличением массы движущейся частицы. При рассеянии на покоящемся ($v_0 = 0$) электроне (3.10) сводится к (2.4) и изменение частоты связано лишь с эффектом отдачи.

В случае быстрых электронов и низкочастотного излучения

$$(3.11) \quad \frac{\hbar \omega}{\gamma_0 m_e c^2} \ll 1$$

эффектом отдачи можно пренебречь и (3.10) переходит к другой своей предельной форме:

$$(3.12) \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1 - \mu_0 \beta_0}{1 - \mu \beta_0}.$$

Покажем, что здесь основную роль играет эффект Доплера. Для этого перейдём в систему покоя электрона ^(e). В ней частота фотона до рассеяния равна

$$\omega_0^{(e)} = \gamma \omega \cdot (1 - \mu \beta_0).$$

В приближении (3.11) изменением частоты фотона при рассеянии в системе покоя электрона можно пренебречь:

$$\omega^{(e)} = \omega_0^{(e)}.$$

Возвращаясь в лабораторную систему отсчёта, находим

$$\omega = \frac{\omega^{(e)}}{\gamma(1 - \mu \beta_0)} = \omega_0 \frac{1 - \mu_0 \beta_0}{1 - \mu \beta_0}.$$

Мы действительно получили (3.12).

Один механизм охлаждения солнечной короны.

В космических объектах часто наблюдается ситуация, когда горячие электроны находятся в поле холодного излучения. Примером может служить солнечная корона, пронизываемая излучением фотосферы: температура короны почти в тысячу раз выше. Обратное комптоновское рассеяние стремится уравнивать значения температуры излучения и электронов. В условиях солнечной короны выполняется условие (3.11), и мы можем пользоваться формулой (3.12). Максимальная потеря энергии электроном имеет место при лобовом соударении ($\alpha_0 = \pi$, $\alpha = 0$):

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)_{\max} = \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0} \approx 1 + 2\beta_0.$$

Следовательно, верхняя оценка для приобретённой квантом энергии за один акт рассеяния равна

$$(3.13) \quad \Delta \varepsilon_{\max} = 2\varepsilon_0 \beta_0.$$

Электрон испытывает в секунду

$$(3.14) \quad N = N_{\phi} \cdot \sigma_T \cdot c$$

соударений с фотонами. Здесь

$$(3.15) \quad \sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ м}^2$$

сечение рассеяния излучения свободным электроном, так называемое, томсоновское сечение. Плотность числа квантов вычисляем по формуле (1.3) третьей главы. Оценим время, необходимое для того, чтобы электрон с начальной энергией E_K охладился до E_{ϕ} . Для численных оценок положим $E_K = 100$ эВ. Приблизительно так можно оценить температуру солнечной короны, хотя она неоднородна и в ней есть участки с разной температурой. Величину E_{ϕ} примем равной температуре солнечной фотосферы — 0.5 эВ, а плотность числа фотонов вычислим по формуле (1.3) третьей главы, положив $T = E_{\phi}$. Величина E_{ϕ} пренебрежимо мала по сравнению с E_K . Следовательно, число актов рассеяния, необходимое для уменьшения энергии электрона от E_K до E_{ϕ} , можно принять равным отношению $E_K / \Delta \varepsilon_{\max}$. Из (3.13) и (3.14) следует нижняя оценка для времени охлаждения электрона при обратном комптоновском рассеянии:

$$(3.16) \quad t_{\text{оох}} = \frac{E_K}{\Delta \varepsilon_{\max}} \frac{1}{N_{\phi} \sigma_0 c} \approx 1 \text{ мкс.}$$

Мы получили оценку времени охлаждения электронов, справедливую по порядку величины. Таким образом, солнечная корона без непрерывного подогрева могла бы оставаться такой горячей всего около часа. В действительности она остынет гораздо быстрее, так как действуют более мощные механизмы охлаждения, чем комптоновское рассеяние — возбуждение дискретных уровней ионов и тормозное излучение. Подчеркнём, что оценки данного раздела не являются точными расчётами. Они предназначены лишь для иллюстрации роли комптоновского рассеяния в астрофизике.