



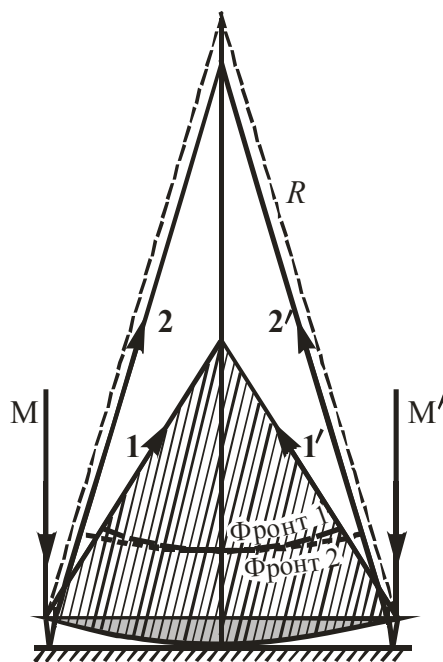
Лабораторный практикум по ФИЗИКЕ

ОПТИКА

Митин И.В., Вишнякова Е.А.

ЗАДАЧА № 132А

*Определение радиуса кривизны линзы
и спектральных характеристик светодиодов
с помощью колец Ньютона*



МОСКВА 2007

Задача 132А.***Определение радиуса кривизны линзы и
спектральных характеристик светодиодов с
помощью колец Ньютона*****с. 3*****Описание установки*****с. 9*****Теоретическое дополнение*****с. 18**

В основу положено описание аналогичной задачи в "Физическом практикуме"
под ред. В.И. Ивероновой («Физматлит», М., 1962г.), автор:Е.С.Четверикова.

ЗАДАЧА 132 (А)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ЛИНЗЫ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СВЕТОДИОДОВ С ПОМОЩЬЮ КОЛЕЦ НЬЮТОНА

Кольца Ньютона – это **кольцевые полосы** (полосы равной толщины), образующиеся при отражении света от поверхностей воздушной прослойки между плоской поверхностью стеклянной пластины и соприкасающейся с ней выпуклой линзой малой кривизны. Толщина воздушной прослойки постепенно увеличивается от центра к краям.

Рис. 1 иллюстрирует процесс формирования интерференционной картины. Волна MM' от точечного удаленного источника нормально падает на плоскую поверхность плосковыпуклой линзы и частично отражается от нее (на рисунке

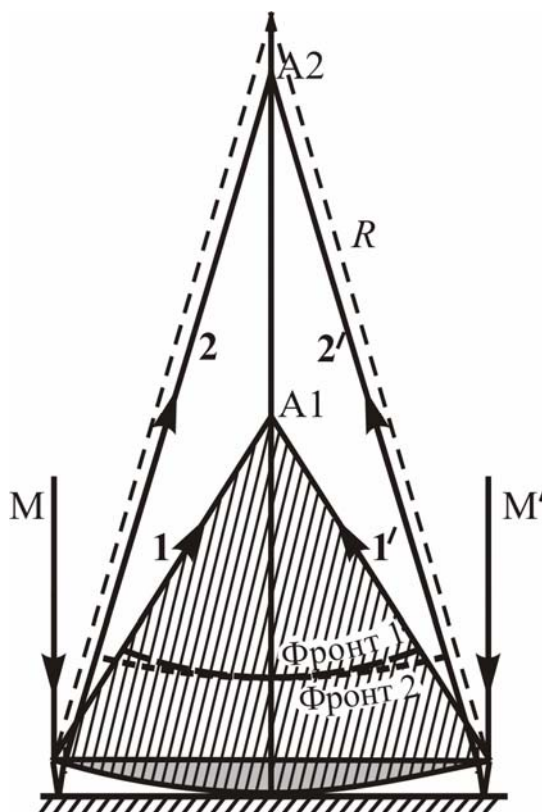


Рис. 1. Область интерференции при наблюдении колец Ньютона.

MM' – падающая волна; $1-1'$ и $2-2'$ – первая и вторая отраженные волны соответственно; Фронт 1 и Фронт 2 – фронты первой и второй отраженных волн (соприкасаются на оси симметрии); R – радиус кривизны линзы; заштрихованная область – область интерференции.

не показано). На сферической поверхности линзы волна испытывает как отражение, так и преломление. Отраженная волна 1-1' сфокусируется в точке А1. Преломленная волна, пройдя воздушный промежуток, сначала отразится от плоской стеклянной пластины, а затем, вновь преломившись на сферической поверхности, сформирует вторую отраженную волну 2-2', которая сфокусируется в точке А2. Интерференционная картина наблюдается в области наложения обеих отраженных волн 1-1' и 2-2' (область интерференции).

Такой метод формирования интерференционной картины называют **методом деления амплитуды**.

Для реального протяженного источника интерференционная картина наблюдается только вблизи выпуклой поверхности линзы и имеет вид концентрических окружностей. Центр интерференционной картины соответствует точке соприкосновения линзы и пластины.

Можно показать (см. Дополнение), что разность хода Δ между волнами на поверхности линзы будет примерно равна удвоенной толщине δ воздушной прослойки:

$$\Delta = 2\delta.$$

Произведем расчет радиуса r_m m -го кольца Ньютона в отраженном свете.

Из геометрических соображений

$$R^2 - (R - \delta_m)^2 = r_m^2,$$

$$2R \cdot \delta_m - \delta_m^2 = r_m^2,$$

$$\frac{2R\delta_m}{r_m^2} - \frac{\delta_m^2}{r_m^2} = 1, \frac{\delta_m^2}{r_m^2} \ll 1,$$

$$2R \cdot \delta_m = r_m^2,$$

$$\delta_m = \frac{r_m^2}{2R}.$$

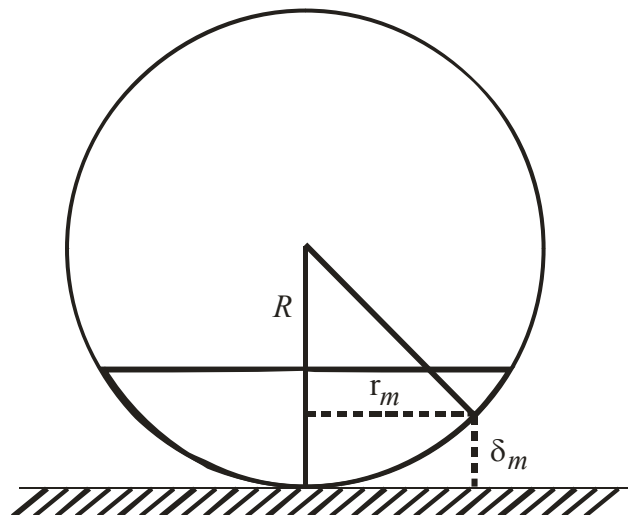


Рис.2 Схема расчета радиуса колец Ньютона.

Для нахождения оптической разности хода необходимо учесть изменение фазы второй волны на π при отражении от оптически более плотной среды (от пластины), что соответствует дополнительной разности хода $\frac{\lambda}{2}$:

$$\Delta_{onm} = 2\delta \cdot n + \frac{\lambda}{2},$$

где n - показатель преломления прослойки (в случае воздуха $n = 1$).

Интерференционные минимумы (темные кольца) образуются в точках, для которых оптическая разность хода равна полуцелому числу длин волн:

$$\Delta_{onm} = 2\delta_m + \frac{\lambda}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Подставляя значение δ_m , получаем:

$$2\frac{r_m^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda + \frac{\lambda}{2},$$

$$\frac{r_m^2}{R} = m\lambda,$$

$$r_m^{memn} = \sqrt{mR\lambda}.$$

Обратим внимание, что в центре интерференционной картины (в отраженном свете) наблюдается темное пятно, т.к. хотя разность хода и равна нулю, но оптическая разность хода равна $\frac{\lambda}{2}$.

Таким образом,

$$r_m^{memn} = \sqrt{mR\lambda}, \quad \text{для } m=0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Светлые кольца (интерференционные максимумы) образуются в точках, для которых оптическая разность хода равна целому числу длин волн:

$$\Delta_{onm} = \Delta \cdot n = 2\delta_m + \frac{\lambda}{2} = m\lambda.$$

$$2\frac{r_m^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

$$\frac{r_m^2}{R} = (2m - 1)\frac{\lambda}{2},$$

$$r_m^{светл.} = \sqrt{(2m-1)R\frac{\lambda}{2}}, \quad \text{для } m=1, 2, 3, \dots$$

С увеличением номера кольца m уменьшается расстояние между соседними кольцами, т.е. кольца становятся теснее ($r_m \sim \sqrt{m}$).

При наблюдении колец Ньютона в проходящем свете картина обратная: пятно в центре будет светлым, а все темные кольца заменяются светлыми и наоборот.

Из формулы $r_m^2 = \lambda R m$ видно, что квадрат радиуса темного кольца линейно зависит от номера кольца. Значит, зная угловой коэффициент наклона зависимости r_m^2 от $(m \cdot \lambda)$, можно определить радиус кривизны линзы, а, зная угловой коэффициент наклона зависимости r_m^2 от $(m \cdot R)$, можно определить длину волны излучения.

В случае немонохроматического источника интерференционная картина с ростом разности хода становится менее четкой и в какой-то момент полностью пропадает (распределение интенсивности на экране становится равномерным). Такое размытие картины связано с тем, что, к примеру, радиус светлого кольца для одной длины волны (из излучаемого источником диапазона длин волн) может совпасть с радиусом темного кольца для другой длины волны (из этого же диапазона).

Если источник равномерно излучает в узком диапазоне длин волн $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ (λ_0 – центр диапазона), то координаты интерференционных максимумов одного и того же порядка для различных длин волн будут отличаться друг от друга. Из рис. 3 видно, что полное размытие картины произойдет, когда расстояние между максимумами m -го порядка для крайних длин волн диапазона станет равным ширине интерференционной полосы Δx (ширину Δx можно считать одинаковой для всего диапазона $\Delta\lambda$). В этом случае максимум m -го порядка для длины волны $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ совпадет с максимумом $(m-1)$ -го порядка для длины волны $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$, т.е. для разности хода Δ в точке исчезновения полос имеем:

$$\Delta = \left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \cdot m = \left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \cdot (m-1).$$

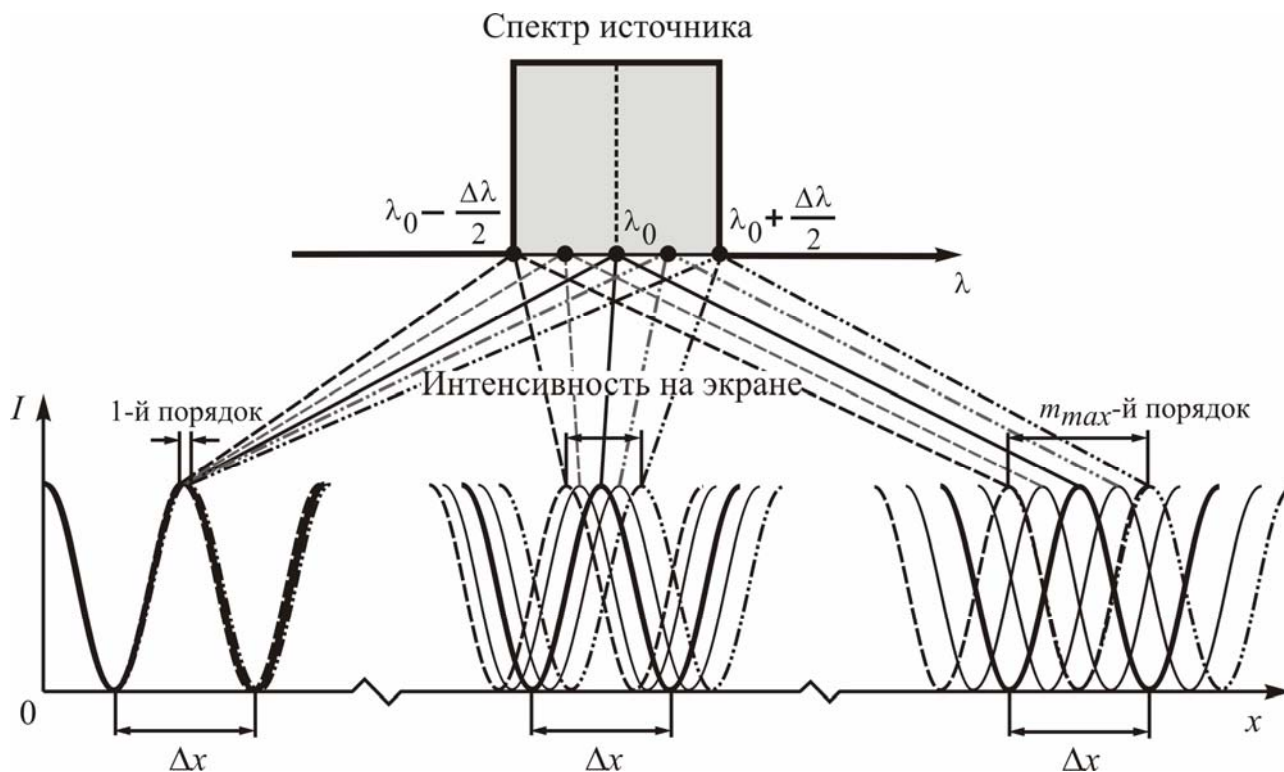


Рис. 3. Размывание интерференционной картины в случае квазимонохроматического источника ($\Delta\lambda \ll \lambda_0$). Показано распределение интенсивности для пяти различных длин волн из диапазона $\Delta\lambda$.

Отсюда получаем, что порядок интерференции m_{max} , при котором полностью пропадают интерференционные полосы, равен

$$m_{max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}. \quad (2)$$

Разность хода Δ , соответствующая максимальному порядку интерференции m_{max} , называют **длиной когерентности** излучения:

$$\ell_{ког} = m_{max} \cdot \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (3)$$

Подсчитав число наблюдаемых интерференционных колец, можно оценить ширину $\Delta\lambda$ диапазона длин волн, излучаемого источником. Отметим, что приведенные соотношения дают несколько преувеличенное значение $\Delta\lambda$, подробнее вопрос о влиянии немонохроматичности рассмотрен в Дополнении.

Если источник света излучает все возможные длины волн видимого диапазона (от фиолетового $\lambda_{\text{ф}}=400\text{нм}$ до красного $\lambda_{\text{к}}=750\text{нм}$), то вместо монохроматических темных и светлых колец получается система цветных колец. При этом даже в

пределах первого порядка интерференции происходит значительное наложение одних цветов на другие, и в ещё большей степени – в высших порядках. В результате для глаза уже начиная с 3-5 порядка вся картина становится однообразно белой.

Использование светофильтра позволяет уменьшить спектральный диапазон падающего излучения. Чем *уже полоса* пропускания светофильтра, тем *меньше* число *цветов* представлено в интерференционной картине, но тем *больше* число наблюдаемых интерференционных *колец*.

Описание установки.

Для наблюдения интерференционных колец Ньютона в задаче применяется микроскоп МБИ-4 (рис. 3).

К револьверной головке микроскопа привинчен вертикальный осветитель, представляющий собой небольшую трубку с боковым окном. Внутри трубки перед окном находится стеклянная пластинка P , установленная под углом 45° к оси микроскопа. Свет от источника S попадает на линзу после отражения от пластинки P .

На столике измерительного микроскопа помещается полированная пластинка из черного стекла, на которую устанавливается исследуемая линза.

На микроскоп установлен винтовой окулярный микрометр АМ-9.

Через окуляр микроскопа наблюдаются (рис. 4):

- интерференционная картина,
- шкала окуляра,
- указатель шкалы (в виде двух вертикальных линий над шкалой)
- крест прицельных нитей.

При вращении барабана окулярного микрометра перемещаются крест и указатель шкалы.

Расстояние между окуляром и объективом подобрано так, что вблизи фокальной плоскости окуляра изображения увеличены в три раза.

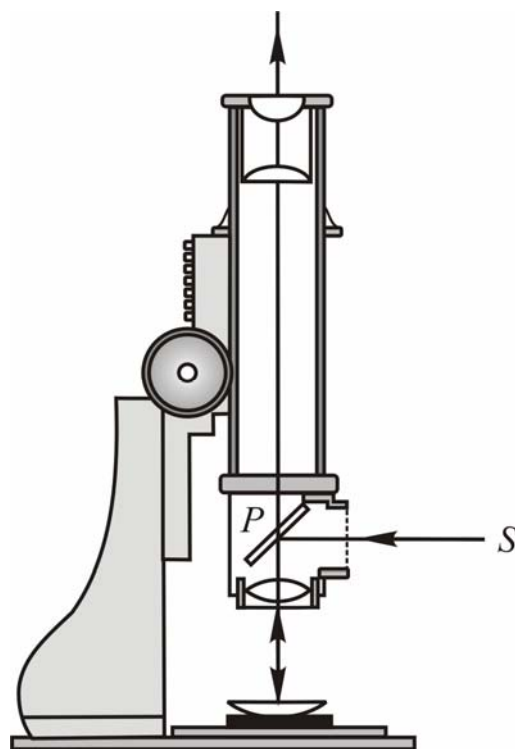


Рис. 3. Установка для наблюдения колец Ньютона.

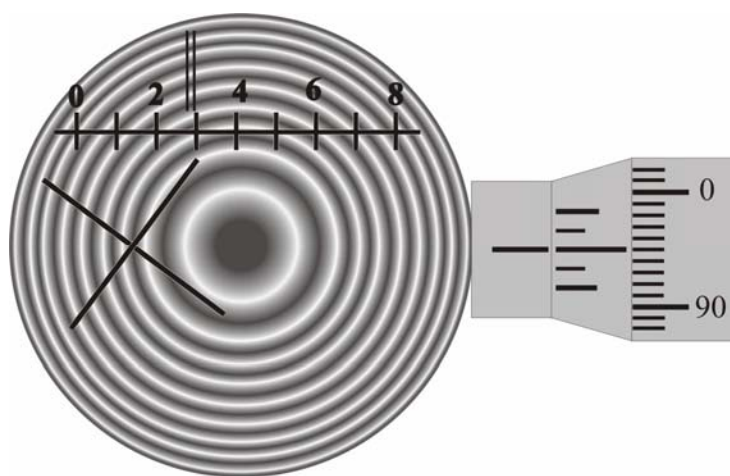


Рис. 4. Отсчет микрометра (левый) для второго темного кольца:

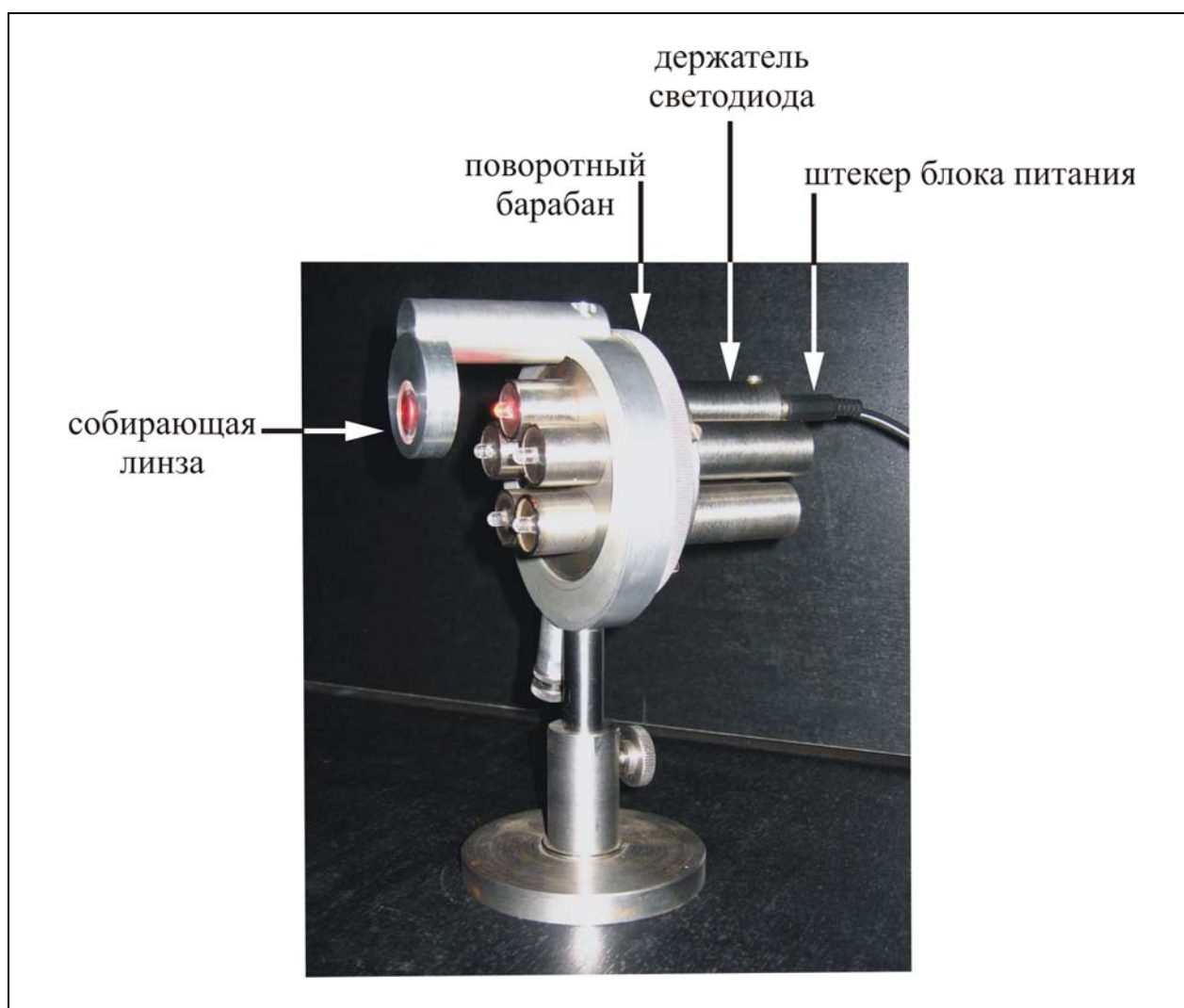
2 деления на шкале окуляра и 95 делений на шкале барабана микрометра

$$295 \text{ делений} = 295 \cdot 0,0033 \text{ мм} = 0,97 \text{ мм} = 0,097 \text{ см.}$$

Таким образом, измеренные расстояния следует уменьшить в три раза, или считать, что перемещение креста нитей на одно деление барабана соответствует не 0,01 мм, а 0,0033мм.

В качестве источников света в задаче используются светодиоды – полупроводниковые приборы, преобразующие энергию электрического тока в световую энергию. Так как светодиоды являются источниками спонтанного излучения, то их спектральные линии имеют заметную ширину (20-50 нм), что соответствует средней тепловой энергии электронов.

На рисунке показан блок светодиодов, используемый в задаче.



В блок входят пять светодиодов, закрепленных на платформе поворотного барабана. Перед верхним светодиодом располагается собирающая линза, фокусное расстояние которой примерно равно расстоянию до светодиода. Это позволяет сформировать почти параллельный пучок света.

Напряжение на светодиод подается при подключении штекера блока питания. После этого поворотом барабана данный светодиод перемещается в верхнее положение.

Блок устанавливается на небольшом расстоянии от микроскопа так, чтобы включенный светодиод располагался на одной высоте с окном осветителя.

Упражнение 1. Определение радиуса кривизны линзы R.

Измерения.

1. Подключить питание к зеленому светодиоду.
2. Фокусировочным винтом добиться четкой картины колец Ньютона. Сместить линзу так, чтобы центр интерференционной картины наблюдался в левой части поля зрения (см. рисунок).
3. Вращая барабан окулярного микрометра, измерить координаты 5-7 темных колец только для правого положения креста. Кроме того, для определения радиуса колец необходимо измерить координату центра интерференционной картины (см. рис. 6).
4. Подсчитать число видимых колец и определить порядок последнего наблюдаемого кольца $m_{набл}$.

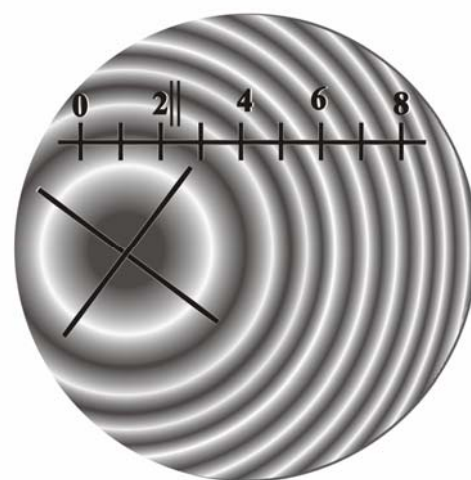


Рис. 6. Положение креста для измерения координаты центра интерференционной картины.

5. На рисунке 7 приведена зависимость относительной интенсивности излучения зеленого светодиода от длины волны, измеренная на спектральном приборе (монокроматор МДР-23, задача №408 практикума). По этой зависимости определить длину волны излучения λ_3 , ширину спектральной линии $\Delta\lambda_3$ и рассчитать максимальный порядок интерференции m_{max} по формуле (2).

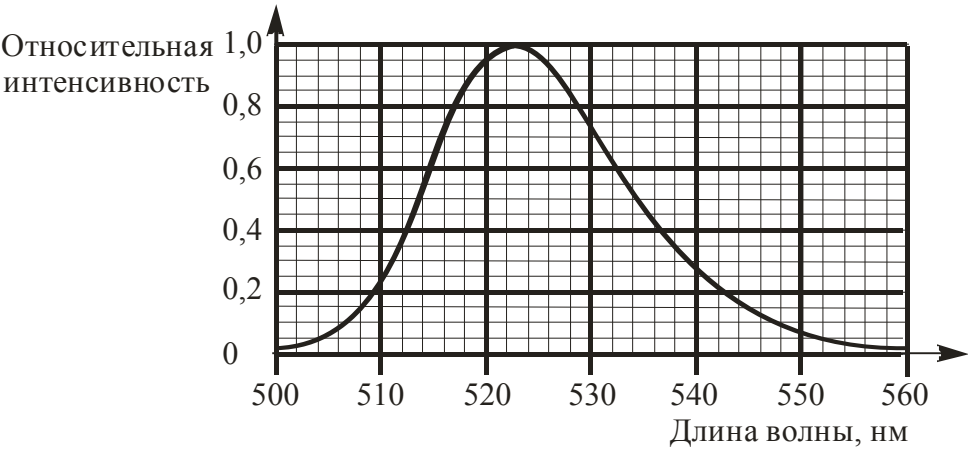


Рис. 7. Зависимость относительной интенсивности излучения зеленого светодиода от длины волны

6. Результаты измерений занести в таблицу.

Таблица 1. Измерения с зеленым светодиодом.

Длина волны:

Ширина спектральной линии:

Максимальный порядок m_{max} :

Номер кольца, m	Правый отсчет микрометра, дел.	Радиус кольца, дел.	Радиус кольца, см	Квадрат радиуса, см ²	($m\lambda$), см
центр					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
Порядок последнего наблюдаемого кольца $m_{набл}$					

Результат упражнения:

РАДИУС КРИВИЗНЫ ЛИНЗЫ:

Вычисления.

1. По результатам измерений с зеленым светодиодом, построить график зависимости квадрата радиуса r_m^2 m -го кольца от $(m \cdot \lambda)$.
2. Используя метод наименьших квадратов МНК и формулу (1), **определить радиус кривизны линзы R** и оценить погрешность.

Результаты упражнения 1 представляются в виде рабочей таблицы, графика, значения радиуса кривизны линзы, значения длины волны излучения зеленого светодиода и ширины его линии излучения.

Упражнение 2. Определение длины волны излучения светодиодов.**Измерения.**

1. Повторить измерения пунктов 2, 3, 4 упражнения 1 для всех цветных светодиодов.
2. Для всех исследуемых светодиодов составить таблицы:

Цвет светодиода: _____					
Номер кольца, m	Правый отсчет микрометра, дел	Радиус кольца, дел.	Радиус кольца, см	Квадрат радиуса, см^2	(mR) , см
центр		-----	-----	-----	---
1					
2					
3					
5					
4					
5					
6					
7					
Порядок последнего наблюдаемого кольца $m_{\text{набл}}$:					

Вычисления.**Определение длины волны излучения.**

1. По результатам измерений с цветными светодиодами построить (на одном графике) зависимости квадрата радиуса r_m^2 m -го кольца от $(m \cdot R)$.
2. Используя метод наименьших квадратов МНК и формулу (1), **определить длину волны излучения каждого из светодиодов** и оценить погрешность.

Упражнение 3. Определение значения видности, ширины линии излучения и длины когерентности.

Измерения. В этом упражнении используются экспериментальные данные, полученные в упражнениях 1 и 2.

Вычисления.

1. Сравнить полученное в упражнении 1 п.5 значение $m_{max} = \frac{\lambda_3}{\Delta\lambda_3}$ с максимальным наблюдаемым порядком интерференции $m_{набл}$, найденным для этого же светодиода.
Объяснить полученный результат.
2. Считая форму линии излучения зеленого светодиода гауссовой, по отношению $\left(\frac{m_{набл}}{m_{max}} \right)_{зел}$ из рис. Д12 определить видность $V_{набл}$, характерную для глаза наблюдателя (при желании расчет видности $V_{набл}$ можно провести по формуле Д1).
3. Для остальных светодиодов, если считать, что видность $V_{набл}$ не зависит от длины волны, справедливо соотношение

$$\left(\frac{m_{набл}}{m_{max}} \right)_{любой} = \left(\frac{m_{набл}}{m_{max}} \right)_{зел}.$$

Из этой формулы по числу наблюдаемых полос $m_{набл}$ рассчитать m_{max} для каждого светодиода. По формулам (2)-(3) рассчитать ширину спектральной линии $\Delta\lambda$ и длину когерентности .

4. Сравнить полученные значения длины когерентности для каждого исследуемого светодиода с соответствующим значением для зеленой линии ртути ($\lambda = 546$ нм, $\Delta\lambda \cong 0,01$ нм).

Результаты упражнения 2 представляются в виде рабочих таблиц, графика и таблицы результатов.

Таблица результатов.

Цвет светодиода	Длина волны излучения светодиода, нм	Максимальный видимый порядок спектра	Значение видности	Ширина линии излучения, нм	Длина когерентности, нм
По данным спектральной кривой					
зеленый					
зеленая линия ртути					
По данным измерений					
красный					
желтый					
голубой					

Упражнение 4. Наблюдение интерференционной картины с источником белого света.

Измерения.

1. Подключить питание к белому светодиоду.

2. Фокусировочным винтом добиться четкой картины колец Ньютона.
3. Объяснить изменение интерференционной картины в сравнении с интерференционной картиной, наблюдаемой с использованием цветных светодиодов (упражнение 2).
4. Установить желтый светофильтр.
5. Объяснить наблюдаемые изменения интерференционной картины.
6. Установить зеленый светофильтр.
7. Объяснить наблюдаемые изменения интерференционной картины.

Основные положения,

объясняющие формирование интерференционной картины

1. При падении волны на воздушную прослойку между плоской поверхностью стеклянной пластины и соприкасающейся с ней выпуклой линзой малой кривизны происходит деление амплитуды исходной волны на границе стекло-воздух.
2. Область перекрывания двух волн (отраженных от верхней и нижней поверхностей прослойки) будет областью интерференции этих волн.
3. В случае когерентного точечного источника интерференционную картину можно наблюдать в любой точке области интерференции.
4. Протяженность источника уменьшает область интерференции (картина локализуется лишь вблизи выпуклой поверхности линзы).
5. Интерференционная картина на выпуклой поверхности линзы представляет собой «полосы равной толщины», каждая из которых соответствует *определенной толщине воздушной прослойки*.
6. Немонохроматичность источника влияет на видность интерференционной картины: с увеличением ширины линии излучения уменьшается число видимых полос.
7. Подсчитав число наблюдаемых интерференционных полос (считая форму спектра источника гауссовой) можно оценить видность, различаемую глазом. В свою очередь, зная значение видности, можно по числу наблюдаемых полос определить ширину спектра излучения.

Литература.

1. Ландсберг Г.С. «Оптика», «Наука», М., 1976.
2. Бутиков Е.И. «Оптика», «Невский диалект», С.Пб., 2003, §5.3
3. Матвеев А.Н. «Оптика», «Высшая школа», 1985, §§9, 29.

Теоретическое дополнение

Строгое рассмотрение формирования колец Ньютона для реальных источников (протяженных и квазимонохроматических) затруднительно, поэтому рассмотрим подробно интерференцию волн от реального источника в тонком воздушном клине, образованном двумя плоскими стеклянными пластинками.

Пусть на воздушный клин с малым углом раствора α падает плоская волна (рис. Д1) ($\vec{k}$ – волновой вектор падающей волны), которая, достигнув верхней границы воздушного клина, частично отразится ($\vec{k}_1$ – волновой вектор первой отраженной волны). Волна, преломившаяся на верхней границе, дойдет до нижней границы клина, снова частично отразится, вернется к верхней границе и вновь преломится на ней ($\vec{k}_2$ – волновой вектор второй отраженной волны).

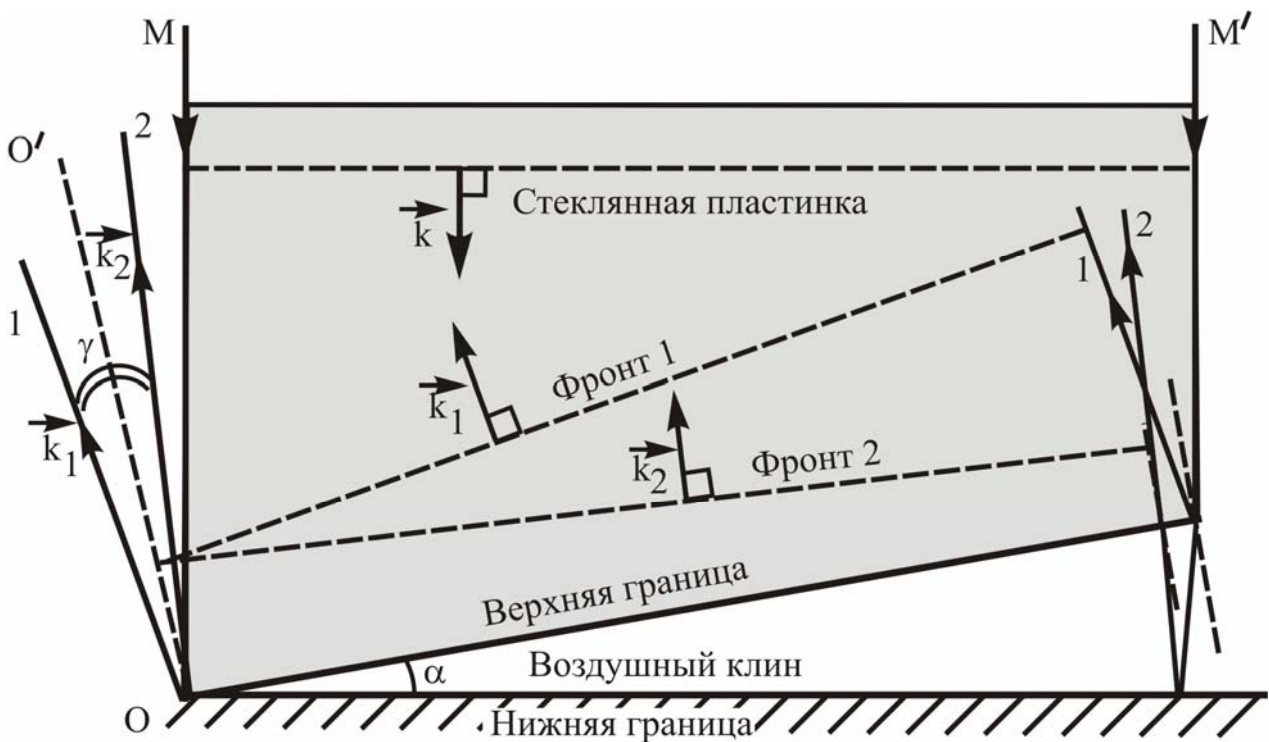


Рис. Д1 Формирование интерференционной картины в воздушном клине.

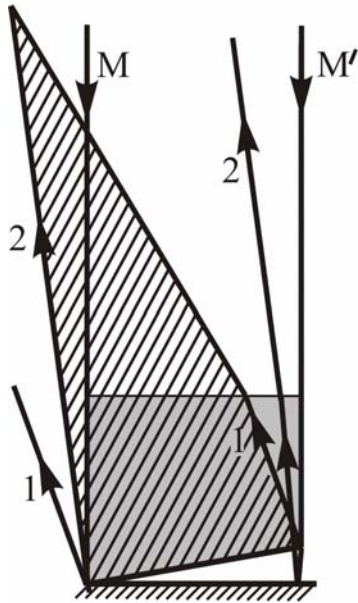


Рис. Д2 Область наблюдения интерференционной картины.

Таким образом, в пространстве над воздушным клином (в стекле!) распространяются две плоские когерентные волны, и в области их наложения будет формироваться интерференционная картина (рис. Д2). Разность хода между волнами будет равна нулю на линии OO' , являющейся биссектрисой угла γ между векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$. Можно показать (см. [2], §5.1, формула 5.5), что на экране Э, «установленном» в стекле перпендикулярно к линии OO' (рис. Д3), будут наблюдаться интерференционные

полосы, расстояние Δx между которыми равно
$$\Delta x = \frac{\lambda_{cm}}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma \cdot n_1},$$

где λ – длина волны излучения в вакууме (воздухе); $\lambda_{cm} = \frac{\lambda}{n_1}$ – длина волны излучения в стекле; n_1 – показатель преломления стекла.

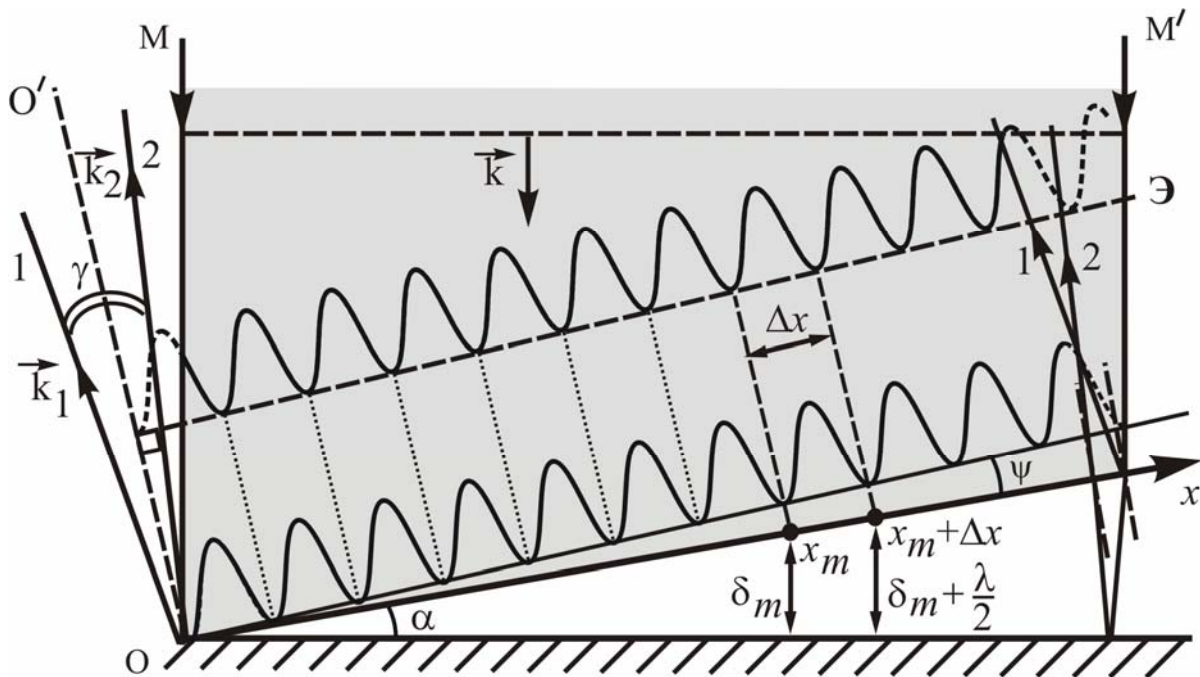


Рис. Д3. Интерференционные полосы на экране Э и на верхней поверхности воздушного клина.

Если исходная волна падает на клин почти нормально, то, как будет показано ниже, угол γ между направлениями распространения отраженных волн (угол между векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$) будет равен:

$$\gamma = 2\alpha \frac{n_2}{n_1},$$

где α – угол раствора клина; $n_2=1$ – показатель преломления воздуха.

Обозначим за x координату точки на верхней границе клина ($x=0$ соответствует точке О). Так как верхняя граница клина практически перпендикулярна биссектрисе OO' (угол ψ на рис. Д3 мал), то расстояние $\Delta x_{нов}$ между интерференционными полосами на границе клина будет равно

$$\Delta x_{нов} = \frac{\lambda}{\gamma \cdot n_1} \approx \frac{\lambda}{2\alpha \cdot n_2} = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

В точке с координатой $x_m = m \cdot \Delta x_{нов}$ находится m -ая интерференционная полоса, что соответствует разности хода между волнами равной $\Delta(x_m) = m\lambda$. Тогда зависимость разности хода $\Delta(x)$ между волнами от координаты x имеет вид:

$$\Delta(x) = \frac{x \cdot \lambda}{\Delta x_{нов}} \approx 2\alpha \cdot x$$

(изменение координаты x на величину $\Delta x_{нов}$, равную ширине полосы, соответствует изменению разности хода на λ).

Такой же результат получается, если считать, что разность хода равна удвоенной толщине $\delta(x)$ воздушного клина:

$$\Delta(x) = 2\delta(x) \approx 2\alpha \cdot x.$$

Таким образом, при наблюдении интерференционной картины в тонком воздушном слое (как в схеме наблюдения колец Ньютона), разность хода на поверхности можно считать равной удвоенной толщине воздушного слоя.

Для вычисления *оптической разности хода* двух отраженных волн необходимо учитывать дополнительную разность хода $\frac{\lambda}{2}$, возникающую при отражении второй волны на границе «воздух-стекло»:

$$\Delta_{onm} = 2\delta(x) + \frac{\lambda}{2}.$$

Интерференционные минимумы (темные полосы) образуются в точках, для которых оптическая разность хода двух отраженных волн равна полуцелому числу длин волн:

$$\Delta_{onm} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2},$$

а *интерференционные максимумы* – в точках, для которых оптическая разность хода будет равна целому числу длин волн:

$$\Delta_{onm} = m\lambda.$$

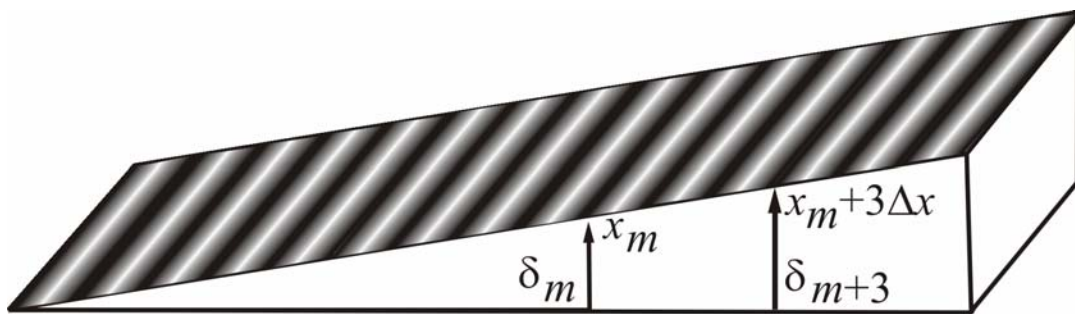


Рис. Д4. Интерференционная картина на поверхности клина

Таким образом, в результате отражений **от участков клина с одинаковой толщиной** в области интерференции возникнут темные или светлые полосы, параллельные ребру клина (рис. Д4), при этом на ребре клина будет наблюдаться темная полоса. Такая интерференционная картина носит название **полос равной толщины**.

Влияние пространственной протяженности источника.

Волны, излучаемые любой парой точек протяженного источника, *некогерентны*. Поэтому интенсивность интерференционной картины для протяженного источника будет равна *сумме интенсивностей* картин, полученных от каждой точки этого источника. Ранее рассматривался случай, когда точечный источник находился от клина на расстоянии, существенно превышающем размеры воздушного клина (тогда исходную волну можно считать плоской). Переход от

одной точки протяженного источника к другой сопровождается изменением угла падения на воздушный клин. Поэтому требуется проанализировать, как интерференционная картина зависит от угла падения исходной волны.

Пусть на поверхность воздушного клина (угол раствора α) исходная волна падает под некоторым малым углом φ к нормали к поверхности клина (рис. Д5).

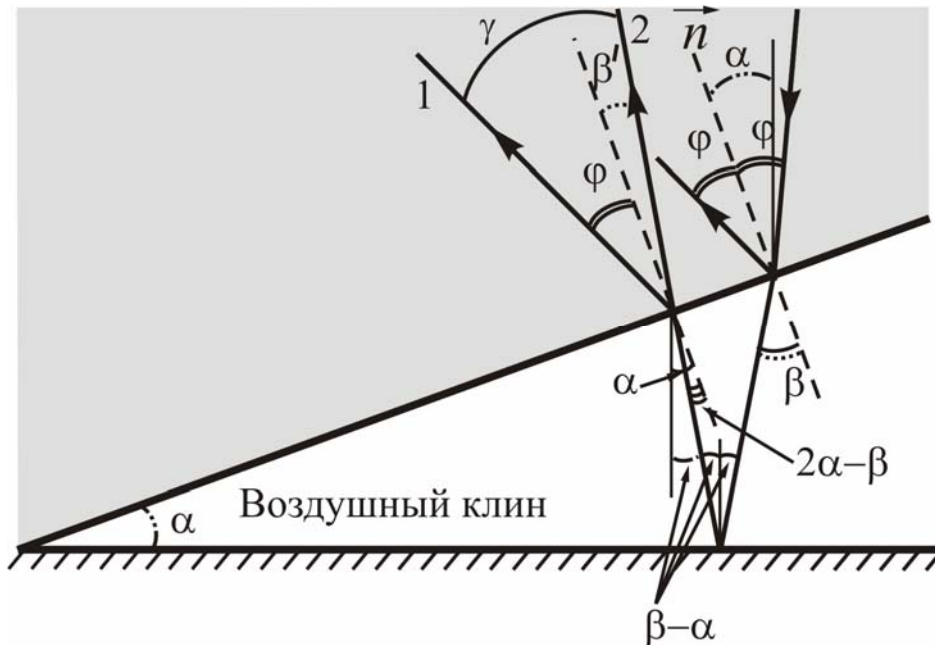


Рис. Д5. Преломление в воздушном клине

Первая отраженная волна будет распространяться под таким же углом φ (угол падения равен углу отражения).

Угол преломления β прошедшей волны находится из закона преломления:

$$n_1 \cdot \sin \varphi = n_2 \cdot \sin \beta.$$

Считая углы малыми, получим:

$$\beta = \varphi \cdot \frac{n_1}{n_2}.$$

Дойдя до нижней границы воздушного клина, волна частично отразится и вернется к верхней поверхности клина. Из геометрических соображений можно получить, что угол падения этой волны на верхнюю поверхность клина будет равен $2\alpha - \beta$.

Испытав преломление, эта волна попадет в стеклянную пластинку под углом β' , причем

$$n_2 \cdot (2\alpha - \beta) = n_1 \cdot \beta'.$$

Тогда угол γ между направлениями распространения и волновыми векторами двух отраженных волн равен:

$$\gamma = \varphi + \beta' = \varphi + (2\alpha - \beta) \frac{n_2}{n_1} = \varphi + \left(2\alpha - \varphi \frac{n_1}{n_2} \right) \frac{n_2}{n_1} = 2\alpha \frac{n_2}{n_1},$$

т.е. угол γ между волновыми векторами не зависит от угла падения исходной волны (напоминаем, что угол падения φ исходной волны мал).

Найдем теперь разность хода между отраженными волнами для произвольной точки S , находящейся внутри стеклянной пластинки. Положение точки S внутри пластинки будем характеризовать расстоянием H от вершины O клина до точки S и углом θ между биссектрисой OO' и линией OS .

Проведем дополнительные построения.

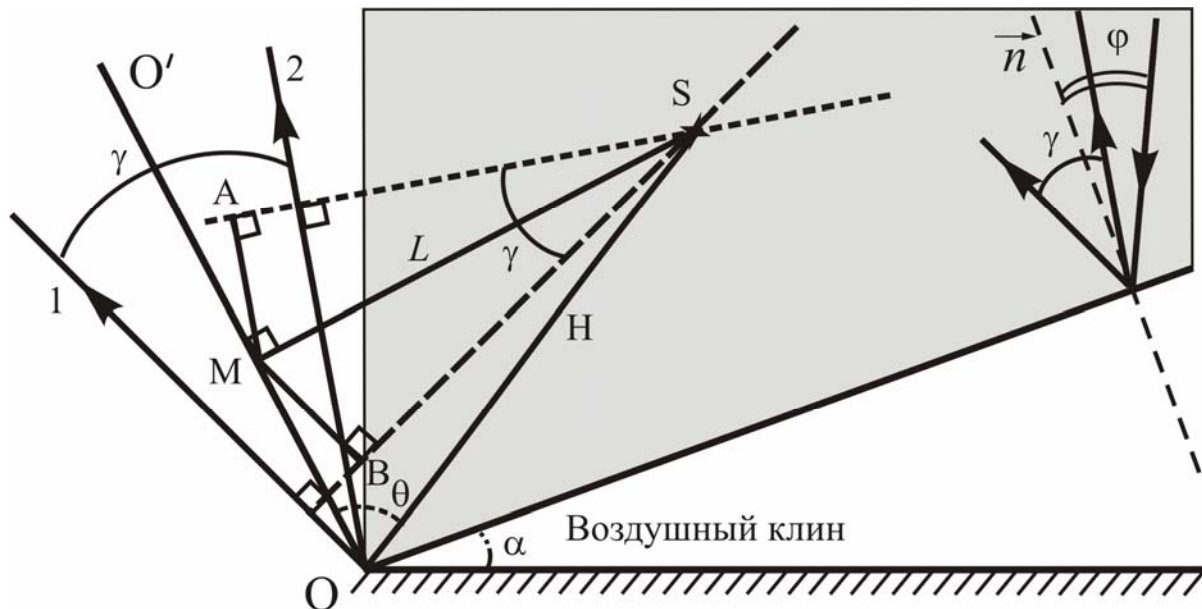


Рис. Д6. Расчет разности хода в произвольной точке

Из точки S опускаем три перпендикуляра:

- 1) на линию OO' (биссектрису угла между волновыми векторами двух отраженных волн); расстояние SM обозначим L ;
- 2) на линию 1, тогда проведенный перпендикуляр будет являться фронтом первой отраженной волны;
- 3) на линию 2, тогда проведенный перпендикуляр будет являться фронтом второй отраженной волны.

Из точки М опускаем два перпендикуляра на фронты первой и второй отраженных волн (равные отрезки МВ и МА соответственно). Можно заметить, что, так как разность хода между отраженными волнами в точке М равна нулю, то разность хода $\Delta(S)$ между этими волнами в точке S, равна:

$$\Delta(S) = MB + MA = 2L \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 2H \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

(так как $L = H \cdot \sin \theta$).

Если разность хода $\Delta(S)$ для волн, идущих от различных точек протяженного источника, будет изменяться на величину, сравнимую с длиной волны, то вследствие некогерентности таких волн интерференционная картина в окрестности точки S исчезнет.

Пусть при переходе от одной точки источника к другой угол падения исходной волны на верхней грани клина изменяется на $d\varphi$, тогда (в соответствии с законом отражения) на такую же величину изменится и направление распространения первой отраженной волны. Так как угол γ не зависит от угла падения φ исходной волны, то на $d\varphi$ изменится и направление распространения второй отраженной волны. Значит и угол θ между биссектрисой угла γ и отрезком OS изменится на такую же величину: $d\theta = d\varphi$.

Так как при этом величины H и γ не изменяются, то для изменения разности хода $\Delta(S)$ получим:

$$d(\Delta) = 2H \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot d(\sin \theta) = 2H \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

Изменение разности хода $d(\Delta)$ будет пренебрежимо малым, если $\cos \theta \approx 0$, т.е. $\theta \approx 90^\circ$. Это условие справедливо для случая, когда точка S лежит ***вблизи поверхности клина***.

Таким образом, влияние пространственной протяженности источника проявляется в том, что интерференционная картина будет локализована (будет наблюдаться) вблизи поверхности клина. По мере удаления от поверхности интерференционная картина пропадает. Аналогичное утверждение справедливо и для схемы наблюдения колец Ньютона.

Видность интерференционной картины.

Возможность наблюдения интерференционной картины зависит от её контрастности. Количественной характеристикой контрастности служит безразмерная величина – видность V интерференционной картины, равная

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

где I_{max} и I_{min} – значения интенсивностей в соседних максимуме и минимуме.

В простейшем случае, если точечный источник излучает равномерно в узком спектральном диапазоне $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ (λ_0 – центр диапазона), то форма $F(\lambda)$ линии излучения представляется в виде прямоугольника (рис. Д7):

$$F(\lambda) = \begin{cases} A_0, & \text{при } |\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\Delta\lambda}{2} \\ 0, & \text{при } |\lambda - \lambda_0| > \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases}.$$

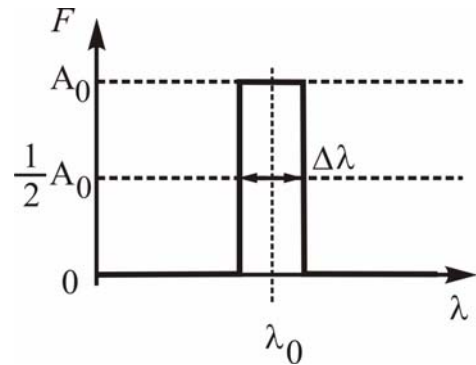


Рис. Д7. «Прямоугольная» форма линии излучения.

Для такого источника зависимость интенсивности I от разности хода Δ двух интерферирующих волн одинаковой интенсивности I_0 определяется выражением

$$I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\Delta k \cdot \Delta}{2}\right)}{\frac{\Delta k \cdot \Delta}{2}} \cdot \cos(k \cdot \Delta) \right] = 2I_0 \left[1 + \text{sinc}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0}\right) \right].$$

Так как $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, а $|\Delta k| = 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$, то зависимость $I(\Delta)$ представляется в виде:

$$I(\Delta) = 2I_0 \left[1 + \text{sinc}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0}\right) \right]$$

Функция видности V равна (рис. Д8):

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left| \text{sinc} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} \right) \right|.$$

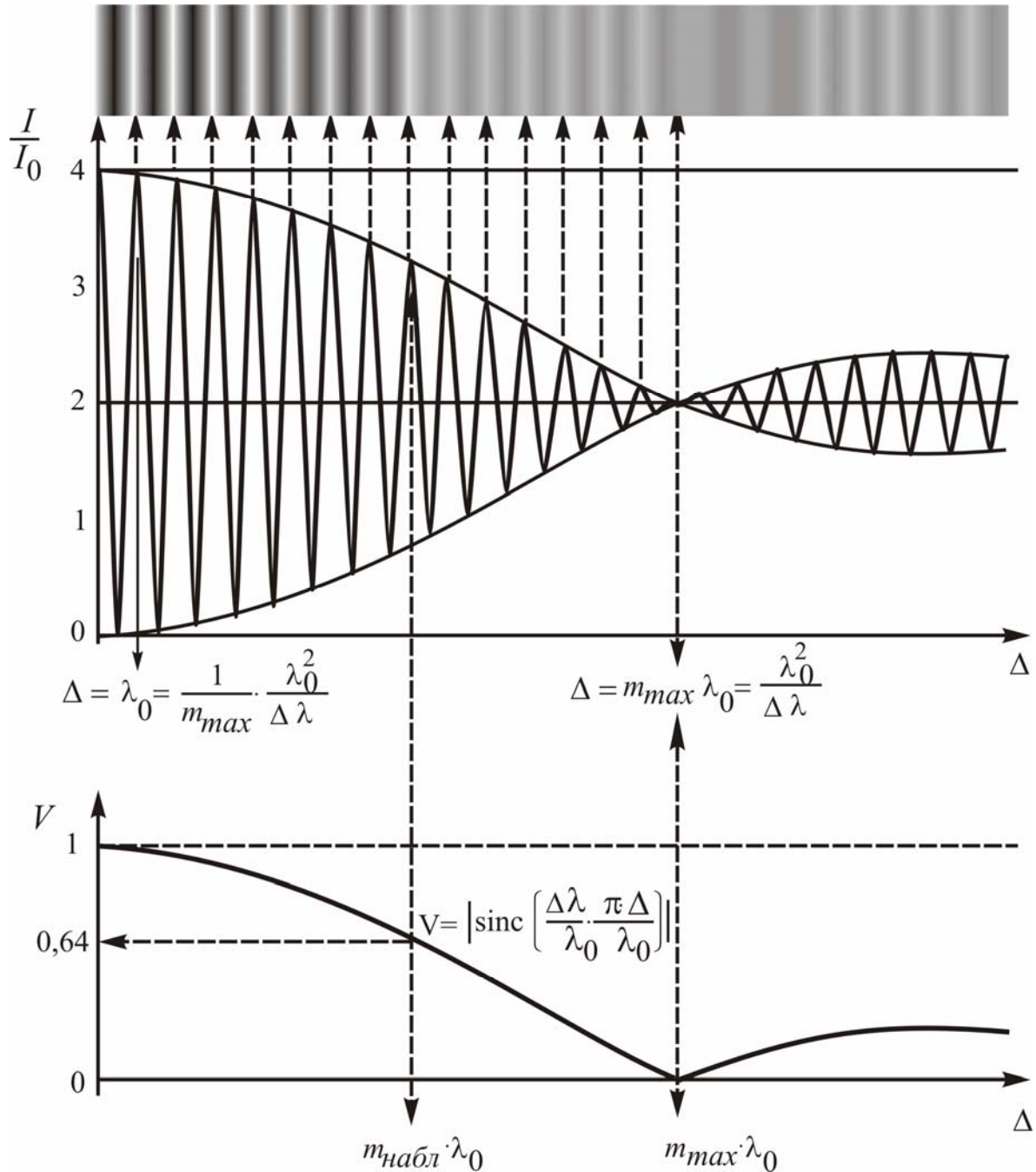


Рис. Д8. Зависимость интенсивности и видности от разности хода для источника с «прямоугольной» формой линии излучения.

Видность интерференционной картины первый раз принимает нулевое значение при значении аргумента, равном π , т.е. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} = \pi$, что соответствует разности хода

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \cdot \lambda_0 = m_{max} \cdot \lambda_0,$$

где $m_{max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ – максимальный порядок интерференции, соответствующий нулевому значению видности.

Разность хода, при которой видность становится равной нулю, называют **длиной когерентности** излучения:

$$\ell_{ког} = m_{max} \cdot \lambda_0 = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}.$$

Длина когерентности связана со **временем когерентности** соотношением:

$$\ell_{ког} = c \cdot \tau_{ког}.$$

Из соотношений можно получить выражение для времени когерентности:

$$\tau_{ког} = \frac{\ell_{ког}}{c} = \frac{\lambda_0^2}{c \cdot \Delta\lambda} = \frac{1}{\Delta\nu},$$

где $\nu = \frac{c}{\lambda}$ – частота излучения; $\Delta\nu = \frac{c \cdot |\Delta\lambda|}{\lambda_0^2}$ – ширина спектра излучения точечного

источника по частотам.

При увеличении ширины линии источника $\Delta\lambda$ число наблюдаемых интерференционных полос уменьшается: если $\Delta\lambda_1 < \Delta\lambda_2$, то

$$m_{max1} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_1} > m_{max2} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_2} \text{ (рис. Д9).}$$

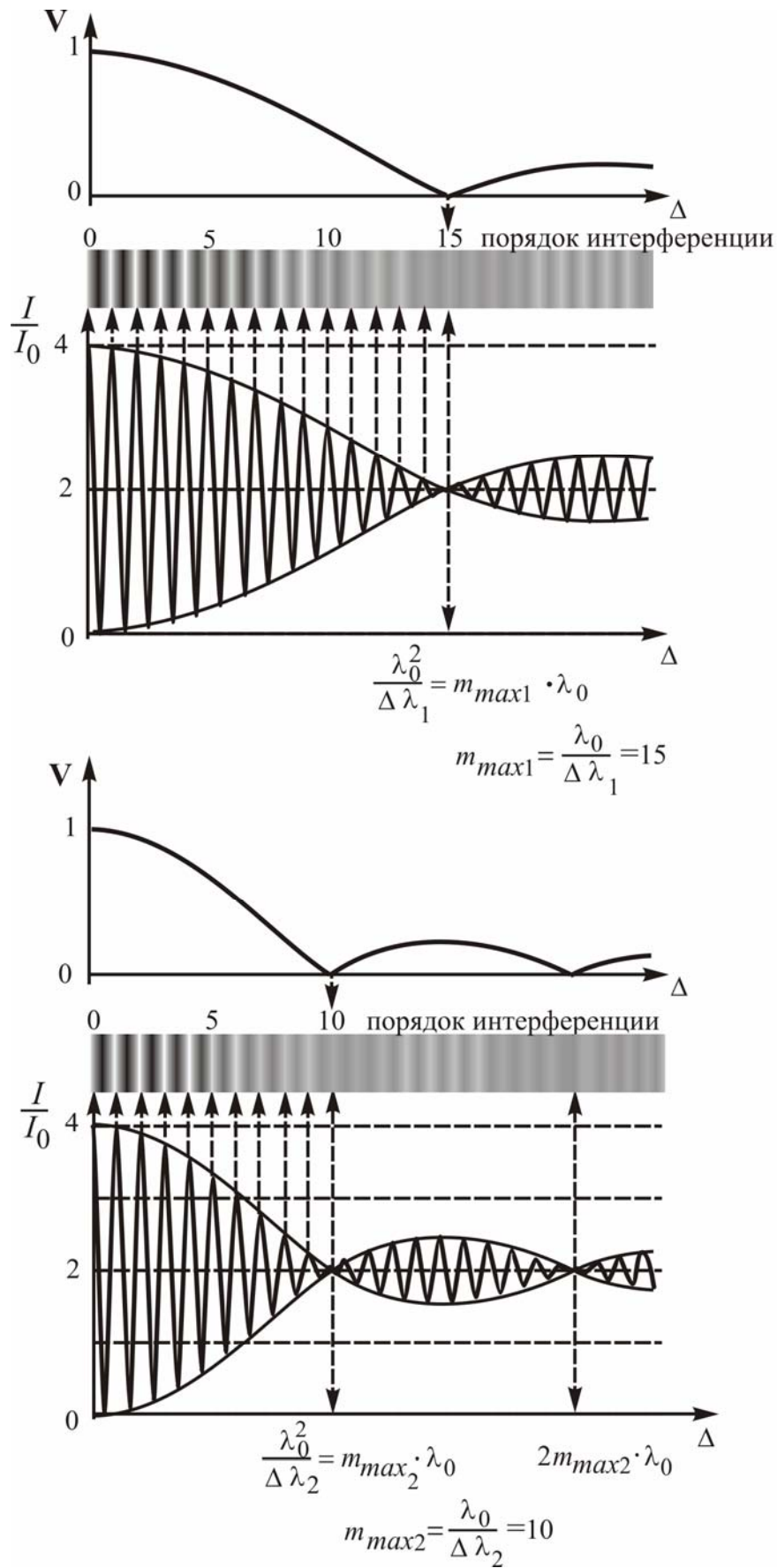


Рис. Д9. На рисунке $\Delta\lambda_1 < \Delta\lambda_2$, $m_1 = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_1} = 15 > m_2 = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_2} = 10$.

Для прямоугольной формы спектра принято считать, что интерференционная картина пропадает при $V \approx 0,5$. Пусть, например, глаз перестанет различать

интерференционные полосы при $V \approx 0,64$, что соответствует аргументу функции **sinc**, равному $\frac{\pi}{2}$ (рис. Д8). Тогда число $m_{набл}$ наблюдаемых интерференционных полос можно найти из соотношения:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta_{набл}}{\lambda} = \frac{1}{m_{max}} \cdot \frac{\pi \cdot (m_{набл} \cdot \lambda)}{\lambda} = \frac{1}{2} \pi.$$

Следовательно, $m_{набл} = \frac{1}{2} \cdot m_{max}$ – число наблюдаемых полос в 2 раза меньше, чем максимальный порядок интерференции.

Таким образом, подсчитав число $m_{набл}$ наблюдаемых интерференционных полос, можно найти ширину линии излучения источника.

Влияние формы линии излучения на функцию видности.

Для реальных источников света форма линии в спектре обычно имеет «колоколообразный» вид. В частности, форма спектральной линии $F(\lambda)$ газоразрядного источника, уширенная вследствие эффекта Доплера, описывается функцией Гаусса:

$$F(\lambda) = A_0 \cdot e^{-2 \left(\frac{(\lambda - \lambda_0)}{\Delta\lambda} \cdot \sqrt{2 \ln 2} \right)^2}$$

где $\Delta\lambda$ – ширина линии излучения на полувысоте (рис. Д10).

Можно показать, что функция видности в этом случае определяется следующим образом:

$$V(\Delta) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi \cdot \Delta\lambda}{\sqrt{2 \ln 2} \lambda_0^2} \cdot \Delta \right)^2}.$$

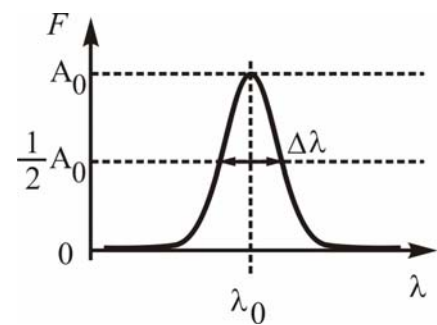


Рис. Д10. Гауссова форма линии излучения.

На рисунке Д11 для сравнения приведены зависимости видности и распределение интенсивности для двух форм линий излучения (прямоугольной и гауссовой) от разности хода при одинаковых значениях ширины спектра

$\Delta\lambda_{\text{прям}} = \Delta\lambda_{\text{гаусс}}$. Отметим, что при всех значениях разности хода $\Delta = m \cdot \lambda_0$, при $0 < m < m_{\text{max}}$ видность для гауссовой формы спектра существенно меньше видности для прямоугольного спектра.

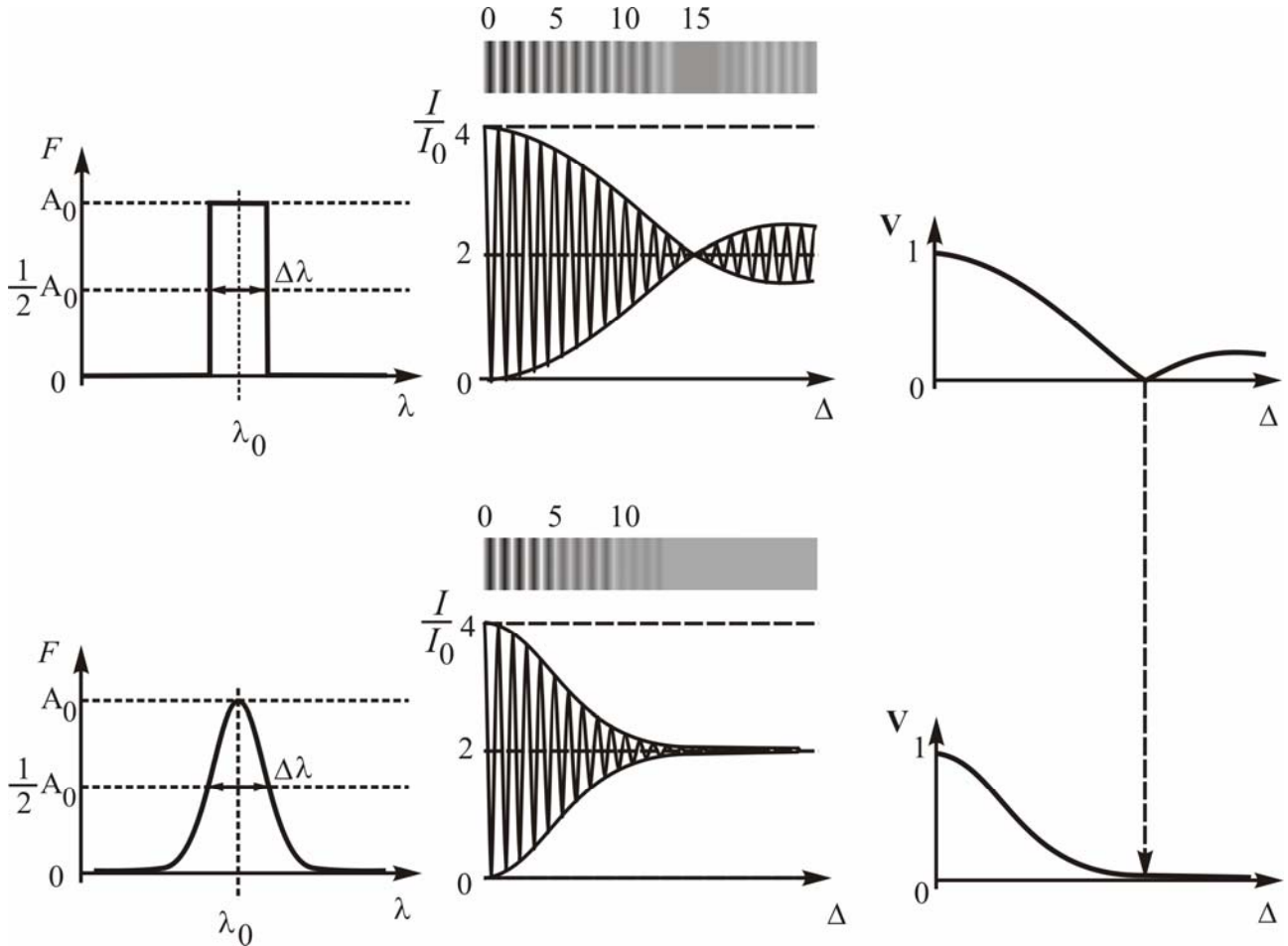


Рис. Д11. Зависимости видностей и распределения интенсивностей для различных форм линий спектра

Если спектральные характеристики источника известны (заданы форма линии – обычно гауссова, длина волны λ_0 и ширина линии $\Delta\lambda$), то, подсчитав число $m_{\text{набл}}$ наблюдаемых полос, можно найти видность $V_{\text{набл}}$, различаемую глазом:

$$V_{\text{набл}} = V_{\text{гаусс}} = e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \Delta\lambda}{\sqrt{2 \ln 2} \lambda_0^2} \cdot \Delta \right)^2} = e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \Delta\lambda}{\sqrt{2 \ln 2} \lambda_0^2} \cdot m_{\text{набл}} \lambda_0 \right)^2} = e^{-\frac{\pi^2}{4 \ln 2} \cdot \left(\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}} \right)^2}, \quad (\text{Д1})$$

где $m_{\text{max}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$.

Для прямоугольной формы спектра аналогичное выражение будет иметь вид:

$$V_{\text{прям}} = \left| \text{sinc} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta}{\lambda_0} \right| = \text{sinc} \left(\pi \frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}} \right).$$

Из приведенных формул следует, что различаемая глазом видность $V_{\text{набл}}$ зависит от отношения $\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}}$. На рис. Д12 приведены графики зависимости видностей для гауссовой (наблюдаемой) $V_{\text{гаусс}}$ и прямоугольной $V_{\text{прям}}$ форм линий спектра от отношения $\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}}$. Так как для одного из светодиодов (в нашем

случае – зеленого) известны и m_{max} , и $m_{\text{набл}}$, то, вычислив отношение $\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}}$, можно по графику определить видность $V_{\text{набл}}$, различаемую глазом наблюдателя.

Если считать, что различаемая глазом видность не зависит от длины волны, то для всех изучаемых в задаче квазимонохроматических источников отношение $\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}}$ будет иметь одно и то же значение. Тогда, зная отношение $\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}}$ для зеленого светодиода и число наблюдаемых полос $m_{\text{набл}}$ для каждого из оставшихся светодиодов, можно найти m_{max} , и, следовательно, ширину линии излучения светодиода.

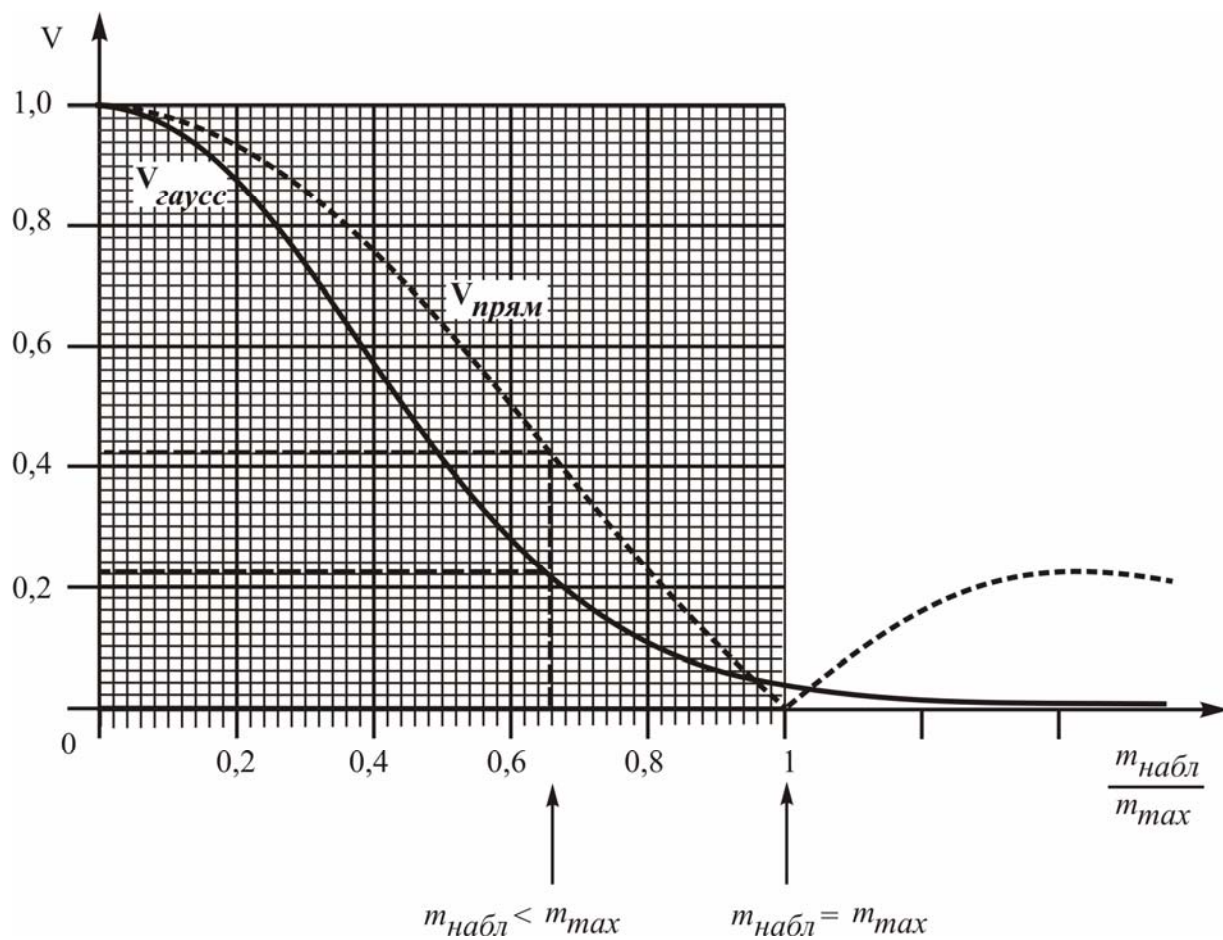


Рис. Д12. Зависимость видности $V_{\text{набл}}$ от отношения $\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}}$.

Например, при $\frac{m_{\text{набл}}}{m_{\text{max}}} = 0,67$ значения видностей равны: $V_{\text{прям}} = 0,42$, $V_{\text{гаусс}} = 0,22$.