

ВОЛНОВАЯ ФИЗИКА

Курс лекций для ФМШ

Часть 1. ОПТИКА И ВОЛНЫ

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

А. П. Ершов

21 февраля 2005 г.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

3.1 Линзы, сферические зеркала. Построение изображений

Хорошо бы иметь устройство, собирающее лучи из целого пучка, выходящего из одной точки, опять в точку. Одна такая система – глаз – позволяет нам видеть. Точки предметов отображаются на заднюю стенку глаза – сетчатку. Из опыта известно, что годится еще выпуклая линза.

Пусть источник света расположен на расстоянии a от линзы, а изображение – на расстоянии b с другой стороны (рис. 3.1). Длина пути по прямой $a + b$, а по ломаной высоты x она больше: $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2}$. Для малого x , то есть тонкого пучка, это преобразуется в $a + b + x^2/2a + x^2/2b$, что явно длиннее.

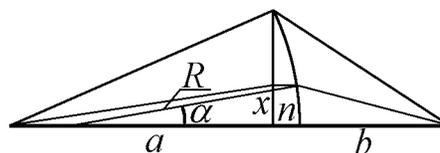


Рис. 3.1.

По принципу Ферма, для схождения лучей в точку надо обеспечить одинаковое время для всех путей. Поэтому короткие пути надо сделать более медленными. Линза, в стекле которой свет замедляется, толще в середине, и можно ожидать компенсации.

Берем плоско-выпуклую линзу из стекла с показателем преломления n и радиусом кривизны одной поверхности R . Если максимальная толщина линзы h_0 , то на высоте x будет меньшее значение h ; разница $h_0 - h = R(1 - \cos \alpha) = R\alpha^2/2 = x^2/2R$. Угол $\alpha = x/R$ проведен из центра кривизны и тоже мал. Получаем $h = h_0 - x^2/2R$.

Чтобы не возиться со временем, деля расстояния на c или (c/n) , принято вместо геометрической длины пути света употреблять **оптическую** длину пути, у которой участки внутри стекла берутся с коэффициентом n . При малых углах путь внутри линзы можно считать горизонтальным. Оптическая длина пути с высотой x будет

$$a + b + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} + (n - 1) \cdot \left(h_0 - \frac{x^2}{2R} \right) =$$

$$= a + b + (n - 1)h_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{n - 1}{R} \right).$$

Скобка $(n - 1)$ появилась, так как единица уже учтена в геометрической части оптического пути. Это выражение не зависит от x при условии

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где $f = R/(n-1)$ называется фокусным расстоянием. Это и есть **формула линзы**. Параллельный пучок, для которого $a = \infty$, как раз собирается на фокусном расстоянии от линзы. Применяется и другая форма записи формулы линзы:

$$xx' = f^2,$$

где x и x' – расстояния от предмета до фокуса и от изображения до другого фокуса. Она легко получается из основной формулы.

Если линза имеет два радиуса кривизны, то

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

У собирающей линзы один из радиусов может быть отрицательным (выпукло-вогнутая линза), однако вогнутая поверхность должна быть менее кривой.

Изображение наблюдается на некотором экране, положение которого b определяется из формулы линзы по данным a и f . Если сдвинуть экран, каждая точка источника перейдет не в точку, а в кружок. Изображение тогда будет размытым («не в фокусе»), примерно как на сетчатке у людей с дефектами зрения (подробнее см. п. 3.4).

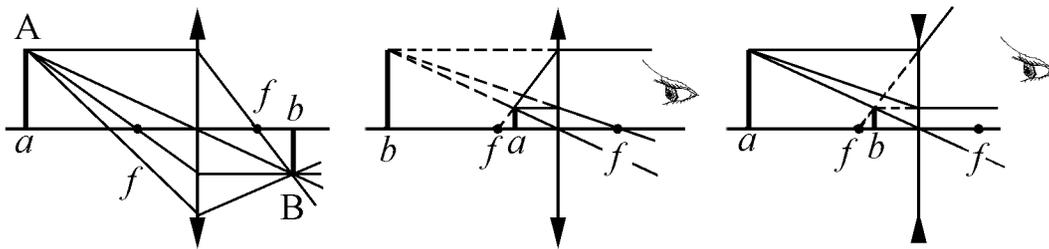


Рис. 3.2.

Для геометрического построения изображений полезны параллельные оси лучи (они после линзы проходят через фокус), проходящие через фокус (становятся параллельными), а также проходящие через центр (так и идут). Пересечение двух лучей, исходящих из одной точки предмета (A), даст изображение этой точки B (рис. 3.2, слева). Отметим, что там же пересекаются **все** лучи, вышедшие из A и прошедшие линзу. Изображение предмета находится в плоскости, положение которой (b) можно определять из формулы линзы. Геометрическое построение дает независимый способ найти плоскость изображения; кроме того, оно еще указывает и его размер (увеличение). **Действительное**

изображение, которое можно видеть на экране, перевернутое, в том числе и у нас на сетчатке. Мы, однако же, воспринимаем окружающую среду в правильном положении (обыкновенно люди видятся ногами вниз, головой вверх) благодаря обработке изображения в мозгу. Обработка эта не сводится к простой инверсии, см. далее п. 3.5

Задача: Доказать, что прямой луч, проходящий из A через центр линзы, попадет в точку B , определенную как пересечение лучей, прошедших через левый и правый фокусы.

При $a < f$ выходит отрицательное b . Построение показывает, что лучи нигде не пересекаются, экран ставить некуда. Однако пересекаются продолжения лучей с той же стороны линзы, где находится предмет (рис. 3.2, центр). Глаз наблюдателя, смотрящего через линзу, воспринимает расходящиеся лучи как вышедшие из этой точки пересечения. Предмет видится увеличенным и висящим на некотором удалении за линзой. Такое изображение называется **мнимым**¹; оно не перевернутое.

Если оба радиуса отрицательны (двояковогнутая линза) или хотя бы один, но он меньше по модулю, то фокусное расстояние отрицательно. Это рассеивающая линза, она не собирает параллельный пучок, а делает из него расходящийся. Изображения в такой линзе мнимые и уменьшенные; они также наблюдаются только глазом. Этот случай показан на рис. 3.2 справа.

Разумеется, действительное изображение тоже можно наблюдать глазом без всякого экрана. Если собирающую линзу отодвинуть заметно дальше фокусного расстояния, то, например, лектор увидит студентов сильно уменьшенными и висящими вниз головой где-то между ним и линзой (что ясно из левой картинки на рис. 3.2).

Все изложенное применимо к **тонким** линзам. Поэтому и не возникал вопрос, от куда отмерять a и b .

Для вогнутого **зеркала** формула такая же, но расстояния a и b – с одной стороны:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где фокусное расстояние $f = R/2$, что легко получить отражением луча, идущего под малым углом. Опять же зеркало должно быть тонким: сегмент в виде полусферы весь свет в точку не собирает (сферическая аберрация). Зато весь свет собирает параболическое зеркало. Пусть уравнение параболы $y = x^2/4f$; путь луча, падающего с высоты H на расстоянии x от оси y , и отражающегося в фокус ($x = 0$, $y = f$) будет $H - x^2/4f + \sqrt{x^2 + (x^2/4f - f)^2} = H + f$ независимо от x . По принципу Ферма, это и означает фокусировку.

Задача: убедитесь в том же, исходя из закона отражения.

¹Потому что без специальных мер оно не видно на каком-либо экране. На сетчатке глаза будет, конечно, действительное изображение, благодаря дополнительному преломлению на входе в глаз. Функция глаза в том и состоит, чтобы сводить расходящиеся пучки от любых предметов на сетчатку. Разумеется, не обязателен именно глаз (с его недостатками как прибора субъективного): мнимое изображение можно вывести на экран с помощью любой собирающей линзы и, в частности, сфотографировать.

Аналогично рассеивающей линзе, выпуклое зеркало дает мнимое прямое изображение, что можно наблюдать в елочных шарах, блестящих чайниках и т.п.

Зеркало свободно от хроматической аберрации (см. п. 3.3), так как все цвета отражаются одинаково. Поэтому наиболее крупные телескопы – зеркальные.

Для эллиптического зеркала все пути из одного фокуса в другой точно одинаковы. Отсюда видно, что принцип Ферма не минимальный, а экстремальный. Если провести касательную прямую к эллипсу, то в точке касания для отражения от этой прямой путь минимальный (рис. 3.3). Если же провести касательную окружность большей кривизны, чем у эллипса, то в точке отражения путь максимальный.

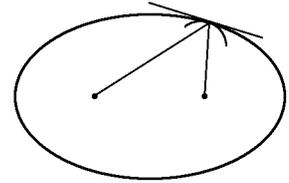


Рис. 3.3.

3.2 Фотометрия

Эта область оптики, изучающая энергетические характеристики света, изобилует новыми названиями. **Световой поток** Φ – это попросту мощность, или энергия/сек, Вт в системе СИ, испускаемая источником. То же самое, но определяемое по световому ощущению (в виде света), измеряется в специальных единицах – **люменах**. Коэффициент перевода: для стандартной зеленой волны 5550 \AA (555 нм): $1 \text{ Вт} = 680 \text{ лм}$, или $1 \text{ лм} = 0,0016 \text{ Вт}$. При этой длине волны глаз наиболее чувствителен. Таблица видности (λ в нанометрах, K – относительная чувствительность в процентах):

λ	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	620	640	680
K	0,4	2,3	6	13,9	32,3	71	95,4	99,5	87	63,1	38,1	17,5	6,1

Кривая видности устанавливается усреднением индивидуальных ощущений, но когда она зафиксирована, можно сделать искусственный глаз на основе фотоэлементов и светофильтров, вполне объективный.

Сила света $I = \Phi/\Omega$ – световой поток на единицу телесного угла, размерность Вт/стер, а по световому ощущению единица кандела = лм/стер (бывшая свеча, ср. канделябр). Эта единица основная, для нее есть эталон: $1 \text{ кд} = 1/60$ силы света, излучаемой в направлении нормали абсолютно черным телом площади 1 см^2 при $2042,5 \text{ К}$ (температура затвердевания платины). Такой эталон представляет собой малое отверстие, через которое излучение выходит из нагретой полости. Практически получается точечный источник, почему и удобно брать излучение в телесный угол.

Вообще 1 см^2 излучает σT^4 в полусферу, а на телесный угол 1 стер в среднем придется доля $1/2\pi$. Но по нормали излучается больше, и получается $\sigma T^4/\pi = 31,4 \text{ Вт/стер}$. Поскольку это 60 кд, то выходило бы, что 1 кд соответствует $0,5235 \text{ Вт/стер}$, или $0,5235 \cdot 680 = 356 \text{ лм/стер}$, если бы мы видели все это излучение с эффективностью

1. Реально же при температуре эталона большая часть энергии приходится на инфракрасный диапазон, и видна только малая доля излучения ($\cong 1/356$), откуда и получается цифра $1 \text{ кд} = 1 \text{ лм/стер}$.

Лампа 100 Вт излучает $100/4\pi \approx 8 \text{ Вт/стер}$. Будь это зеленый свет, вышло бы $8 \cdot 680 \approx 5500 \text{ кд}$, но такое количество свечей явно завышено. На самом деле светотдача ламп накаливания $10 - 20 \text{ лм/Вт}$, или $\sim 1 \text{ кд/Вт}$. Световой КПД порядка $2 \div 3 \%$. Заметно лучше у люминесцентных ламп «дневного света», излучающих в более видимом диапазоне (десятки процентов). Поскольку фотометрия – это стык физики и физиологии, мало кому охота в этом разбираться. Даже в эталоне уцелел 1 см^2 , а на лампочках пишут не канделы, а ватты.

Освещенность $E = \Phi/S$ – энергия, опять-таки по световому ощущению, падающая на единицу поверхности. Размерность $\text{лм/м}^2 = \text{люкс}$. Для точечного источника с силой света I : $\Phi = 4\pi I$, $E = I/R^2$ на расстоянии R . Освещенность в солнечный день 10^5 лк , требуемая для тонких работ на рабочем столе 100 лк . Следовательно, надо лампу накаливания около 100 Вт на расстоянии 1 м. Если поверхность не нормальна к свету, $E = I \cos \theta / R^2$. Наклонное падение солнечного света зимой уменьшает поток энергии и вместе с ростом отражения позволяет снегу накапливаться.

Яркость $B = I/S$ – сила света с единицы излучающей поверхности. $1 \text{ кд с } 1 \text{ м}^2$ – это будет нит, а с 1 см^2 – стильб (сб). Под углом следует брать «видимую» поверхность – проекцию на направление наблюдения. Яркость черного тела не зависит от наклона поверхности, так как сила света и видимая поверхность пропорциональны $\cos \theta$. Яркость Солнца в зените $16,5 \cdot 10^4 \text{ сб}$, волоска лампы накаливания $\approx 1000 \text{ сб}$, люминесцентные лампы и пламя свечи дают $\approx 0,5$, полная Луна и дневное небо $\approx 0,25 \text{ сб}$.

3.3 Дисперсия, спектры

В п. 2.4 мы видели, что показатель преломления может зависеть от частоты. Изменение n , то есть скорости волны, называется **дисперсией**. В области прозрачности эта зависимость обычно слабая. Например, для воды $n_F = 1,337$, $n_D = 1,333$, $n_C = 1,331$. Обозначения – по Фраунгоферу: F – 486,1 нм, голубая линия H, D – 589,3 нм, желтая линия Na, C – 656,3 нм, красная линия H. В веществе λ меняется, и правильнее было бы указывать частоту, но исторически принято употреблять длины волн в вакууме (при $n = 1$). Линия D находится в середине видимого диапазона, к ней обычно и относится справочный показатель преломления. Как количественная мера дисперсии, используется разность $n_F - n_C$ (средняя дисперсия). Например, для стекол она может быть 0,0213 (тяжелый флинт, $n_D = 1,65$), и 0,0085 (легкий крон, $n_D = 1,517$), то есть в пределах видимого света n может изменяться примерно на процент.

Дисперсия света хорошо видна на призме. Угол отклонения луча порядка (угол призмы) $\cdot (n - 1)$ и тоже меняется с λ . В быту красивые радужные блики дают граненое

стекло и хрусталь. Блеск драгоценных камней прямо связан с показателем преломления n . Действительно, коэффициент отражения растёт с n ; кроме того, при большом n шире диапазон углов полного внутреннего отражения.

По величине n алмаз, имеющий $n_D = 2,42$, превосходит все камни (рубин – 1,76, изумруд – 1,58). Благодаря специальной огранке, выработанной ювелирами в течение веков, почти весь свет, вошедший в камень в лицевой стороны, испытывает полное отражение от невидимых задних граней и выходит опять в переднюю полусферу (рис. 3.4). У алмаза и дисперсия почти максимальная: $\Delta n = 0,044$. От дисперсии зависит «игра» камня, то есть его способность переливаться разными цветами, разлагая свет. Алмаз виден испускающим цветные лучи большему числу приглашенных на бал, нежели кусок стекла той же формы с $\Delta n = 0,015$ (в отношении $44/15 \approx 2,9$). У рубина $\Delta n = 0,018$, и такое отношение будет $44/18 \approx 2,44$. Рубин, однако, ценится еще и за красивый натуральный цвет. У искусственного камня фианита² (кубическая окись циркония) $\Delta n = 0,06$ – даже больше, чем у алмаза, а $n = 2,15 \div 2,18$. На вид фианит практически неотличим от алмаза, пока не поцарапать его заведомым алмазом, к тому же легко получать цветные камни, если варить его с добавками³.

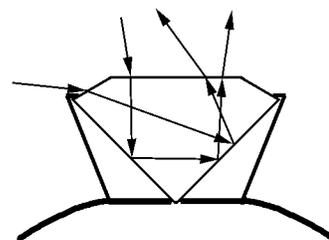


Рис. 3.4.

Пропуская луч через призму, получаем спектр в виде разноцветных полос. Если сильнее преломляются короткие волны (большие частоты), это называется нормальной дисперсией; в редких обратных случаях говорят об аномальной дисперсии. Последовательность цветов видимого света:

λ	380÷450	450÷480	480÷510	510÷562	563÷585	585÷620	620÷760
цвет	Ф	С	Г	З	Ж	О	К

В сторону коротких волн далее идет УФ, рентген, гамма – диапазоны, границы между которыми несколько расплывчаты. В сторону длинных волн – ИК, миллиметровые, дециметровые, УКВ, КВ, СВ, ДВ и далее сверхдлинные. С обеих сторон нет естественных пределов⁴. Линза тоже разлагает свет – фокусы для разных волн будут в разных местах (хроматическая аберрация). В составных объективах фотоаппаратов она компенсирована применением разных сортов стекла.

²Название дано в честь Физического Института АН.

³Первым удачным заменителем алмаза был иттриево-алюминиевый гранат (ИАГ), имеющий $n_D = 1,83$, $\Delta n = 0,026$ и приближающийся по твердости к алмазу. Успеху продукта способствовал удачный опыт Элизабет Тейлор, которой Ричард Бартон в 1969 г. подарил алмазный кулон в 69,42 карата, стоимостью более 1 млн долларов. Страховка при ношении натурального камня обходилась Э. Тейлор в 1000 долларов за вечер, а стоимость ИАГ-копии была только 3500 долларов. Камни можно было отличить, если они находились рядом, но только эксперт мог определить синтетический камень, если рассматривать его отдельно. См.: Д. Элуэлл. Искусственные драгоценные камни. М.: Мир, 1986.

⁴Если не говорить о таких, не очень естественных, как размер Вселенной или ее видимой части, или равенство энергии кванта $\hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$ характерной энергии Вселенной.

Спектры, которые мы видим в домашних условиях, непрерывные: в них присутствуют все волны. Такой спектр дают **оптически толстые** тела типа Солнца, нити накаливания лампочки и т.п. Излучение находится в равновесии с веществом; предельный случай полного равновесия – абсолютно черное тело. Наоборот, **оптически тонкие** тела, в которых длина пробега света больше размера, могут излучать в отдельных ярких линиях, соответствующих переходам между атомными и молекулярными уровнями энергии. Если посмотреть через призму на лампу накаливания, видна радужная расплывшаяся нить лампы. Взглянув же на ртутный уличный фонарь, увидим два фонаря, желтый и зеленый, расположенные рядом (ртуть среди прочих излучает яркую линию 5463эл и дублет 577&579желт). Атомные переходы между возбужденными электронными состояниями дают серии, называемые линейчатыми спектрами; в молекулах наблюдается большое количество близко лежащих колебательных и вращательных переходов (полосатые спектры). Плазма дает и непрерывный спектр от свободных электронов.

Каждое вещество имеет свой характерный спектр, чем пользуются при анализе. Само собой, поглощение в таких спектральных линиях гораздо больше, чем вне их. Поэтому из непрерывного спектра Солнца, проходящего через солнечную атмосферу, вырезаются темные линии поглощения (фраунгоферовы). Можно найти, из чего состоят звезды. Например, на Солнце был в 1868 г. открыт новый элемент – гелий (Ж. Жансен, Н. Локьер), на Земле выделенный только в 1895 г. (У. Рамзай).

На некоторых звездах обнаружен искусственный элемент технеций, не имеющий стабильных изотопов (максимальный период полураспада 4,2 млн лет⁵). Можно думать, что это сигнал братьев по разуму. В лабораториях используют для разложения в спектр монохроматоры с призмами либо дифракционными решетками. Много спектральных приборов применяют химики (УФ, ИК, ЯМР).

Радуга, разумеется, тоже связана с дисперсией. Пусть горизонтальный солнечный луч попадает в каплю воды в точке, характеризуемой углом φ к нормали. Преломленный луч пойдет под углом r , $\sin r = \sin \varphi / n$. Дойдя до поверхности, он частично отразится опять внутрь и снова подойдет к поверхности под тем же углом r , после чего выйдет снова под углом φ к радиусу. Угол поворота луча: $\psi = \pi + 2\varphi - 4r$; угол луча с горизонтом (направление, откуда он придет к вам в глаз) будет $\theta = 4 \arcsin(\sin \varphi / n) - 2\varphi$.

При малом φ и показателе преломления воды $n = 4/3$ $\theta \approx \varphi$. При максимальном $\varphi = \pi/2$ $\theta = 4 \arcsin(3/4) - \pi = 0,25$, причем вблизи этого значения убывает. Максимум θ где-то посередине, а именно при $\sin \varphi_0 = \sqrt{(4 - n^2)}/3 = 0,86$, что соответствует прицельному углу $\varphi_0 = 1,04 = 59^\circ$. Угол прихода $\theta_0 = 4r_0 - 2\varphi_0 = 0,734 = 42^\circ$.

При малом φ и показателе преломления воды $n = 4/3$ $\theta \approx \varphi$. При максимальном $\varphi = \pi/2$ $\theta = 4 \arcsin(3/4) - \pi = 0,25$, причем вблизи этого значения убывает. Максимум θ где-то посередине, а именно при $\sin \varphi_0 = \sqrt{(4 - n^2)}/3 = 0,86$, что соответствует прицельному углу $\varphi_0 = 1,04 = 59^\circ$. Угол прихода $\theta_0 = 4r_0 - 2\varphi_0 = 0,734 = 42^\circ$.

⁵Для ⁹⁷Tc: Физическая энциклопедия, т. 5, стр. 112; в Химической энциклопедии (т. 4, стр. 560) приводится цифра 2,6 млн лет.

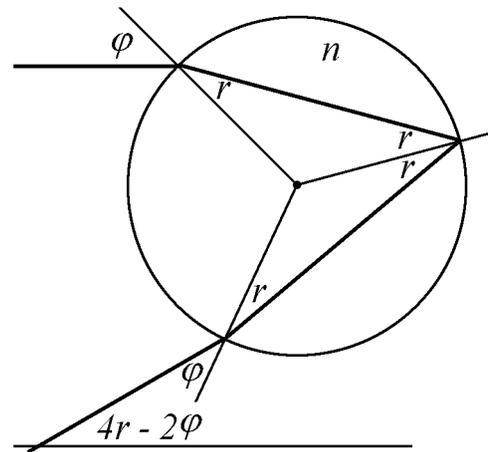


Рис. 3.5.

После дождя, когда в воздухе много капель воды, под этим углом будет наблюдаться повышенный уровень рассеянного излучения. Как всегда вблизи максимума, близкие по прицельному углу $\varphi \approx \varphi_0$ лучи будут выходить практически под таким же углом θ_0 и, таким образом, сгущаться. Для прочих прицельных углов такого увеличения яркости не будет. Такое рассеянное излучение, именно по дуге с углом 42° впереди себя, если стоять спиной к Солнцу, мы и видим в подходящую погоду. Из-за дисперсии для разных цветов углы θ_0 будут немного отличаться и вместо просто яркой полосы «солнечного» цвета на небе мы видим ряд полос – радугу. При хорошем свете бывает видна вторая, менее яркая, радуга, вызванная двукратным отражением в капле.

3.4 Оптические приборы

Главный прибор – это глаз. Поскольку он не совсем похож на линзу, рассмотрим преломление в нем подробнее. Разница в том, что экран – сетчатка – тоже находится в преломляющей среде. Для разнообразия применим не принцип Ферма, а закон преломления на сферической поверхности: угол падения $i = x/R + x/a$, угол преломления $r = i/n = x/R - x/b$, откуда «формула глаза»

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{R}.$$

При $a = \infty$ $b = nR/(n-1)$. Поскольку это порядка $2R$, получается $n \approx 2$. На самом деле радиус, входящий в фокусное расстояние, меньше, так как спереди у глаза выступает хрусталик, имеющий большую кривизну. Соответственно n получается завышенным. Но мы знаем, что n больше, чем у воды (иначе в воде глаз совсем бы не работал). Преломляющая, или оптическая сила глаза $1/f = (n-1)/R \approx 50$ обратных метров (диоптрий). К другим расстояниям глаз приспособляется, изменяя кривизну передней поверхности (хрусталика). Для этого нужно не так много: при $a = 10$ см надо увеличить оптическую силу на 10 дптр, т.е. внести малую поправку к основной форме глаза. Расстоянием наилучшего зрения считается 25 см, при $R \approx 2$ см практически бесконечность ($1/0,25$ увеличивает $1/f$ на $\approx 10\%$). С одной стороны, чем ближе, тем больше размер изображения на сетчатке, больше деталей (пикселей) удастся различить. Но на расстояниях меньше 25 см средний глаз будет испытывать напряжение при фокусировке, а ближе некоторого расстояния вообще откажется фокусировать.

В небольших пределах исправляют зрение очки (± 50 не бывает). Считаем, что линза с фокусным расстоянием f_1 находится близко к глазу. Она строит изображение в точке c : $1/a + 1/c = 1/f_1$. Для глаза это изображение в точке $-c$: глаз видит лучи, сходящиеся где-то в затылок; $-1/c + n/b = 1/f$. Складывая уравнения, имеем $1/a + n/b = 1/f_1 + 1/f$, откуда виден смысл оптических сил $1/f$: для близких линз они складываются.

Близорукий глаз не может настроиться на удаленные предметы. Параллельный пучок из бесконечности сводится таким глазом в точку впереди сетчатки, а на сетчатке

вместо точки получится кружок. Пусть человек с таким дефектом может увидеть резко предмет, находящийся на максимальном расстоянии a от глаза. Можно написать $1/a + n/b = 1/f$; либо b великовато, либо f мало. Исправим дефект линзой с фокусным расстоянием F : $1/\infty + n/b = 1/f + 1/F$. Лучи из бесконечности сведутся в точку, если $1/F = -1/a$, то есть $F = -a$ (рассеивающая линза). Например, человек, видящий не дальше 20 см = 0,2 м, нуждается в очках $(-1/0,2) = -5$. Сложные манипуляции окулистов при подборе очков представляют собой род практической магии, рассчитанной на малограмотных, и дают примерно такую же точность ($\pm 0,5$ дптр).

Дальновзоркий глаз не фокусируется на близкие предметы: его оптическая сила, наоборот, мала. Бывает, что при дальновзоркости не фокусируются предметы ни на каких расстояниях: даже параллельный пучок сводится за сетчатку. Поэтому такое же простое измерение, как для близорукого глаза, не всегда осуществимо. Однако можно вооружить глаз достаточно сильной собирающей линзой, которая сведет задачу к предыдущему случаю (близорукости). Полученные «отрицательные» диоптрии надо будет вычесть из оптической силы этой пробной линзы. Зато фокусное расстояние собирающей линзы гораздо проще находится экспериментально – с помощью удаленного источника (например, Солнца) и линейки.

Следующий по распространенности прибор – лупа, применяемая для «увеличения» мелких объектов. Предмет располагается ближе фокуса линзы. Линза создает прямое мнимое изображение, которое глаз видит «висящим» за линзой, на расстоянии $|b| = af/(f - a)$ от нее. При размере предмета (или его мелкой детали) X видимый размер изображения $Y = X |b| / a$. Ясно, что чем ближе предмет к фокусу, тем крупнее (но и дальше) изображение. Обычно изображение помещают на бесконечность, тогда $a \rightarrow f$. Следует сравнивать угловой размер изображения Y/b с размером X/L_{25} , под которым смотрел бы невооруженный глаз на расстоянии наилучшего зрения $L_{25} = 25$ см. Из подобия треугольников с катетами Y и X (рис. 3.6) получаем отношение

$$\frac{Y}{b} = \frac{X}{a} \approx \frac{X}{f}, \quad \text{откуда увеличение} \quad U = \frac{Y}{b} \bigg/ \frac{X}{L_{25}} = \frac{L_{25}}{f}.$$

Лупа должна иметь по возможности малое фокусное расстояние (большую «силу»). Линза с фокусным расстоянием 2,5 см увеличивает в 10 раз (обозначается 10^\times). Для близоруких, у которых расстояние наилучшего зрения меньше, меньше и толку от лупы.

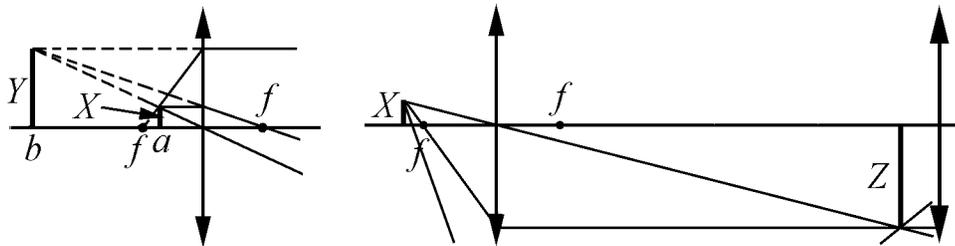


Рис. 3.6.

Левенгук изготовлял однолинзовые микроскопы (попросту лупы) с увеличением в сотни раз, для чего надо $f \sim 2,5$ мм. Поскольку поперечник линзы должен быть заметно меньше ее радиуса кривизны, ясно, какая требовалась ювелирная работа.

Сейчас имеются микроскопы с увеличением $\sim 10^3$. Поскольку одна линза не позволяет этого добиться, не поможет ли еще одна? Очевидный прием – создать изображение одной линзой (объективом), а затем рассматривать его через другую линзу (окуляр).

Пусть предмет размера X находится чуть дальше фокуса объектива и создает действительное изображение размера Z на расстоянии L . Увеличение $Z/X = L/f_1$. Далее, окуляр дает изображение с увеличением $Y/Z = L_{25}/f_2$, так что в итоге $Y/X = (LL_{25})/(f_1 f_2)$. При $L \approx L_{25}$, что примерно и выполняется для микроскопов, увеличение порядка квадрата величины, характерной для одной отдельно взятой лупы. На рис. 3.6 проведен луч, явно не проходящий через первую линзу. Такие лучи тем не менее можно использовать для построения, воображая, что линза продолжена вверх и вниз на сколько нужно. Этим несколько улучшается наглядность для второй линзы: она «видит» расходящийся из нижней точки изображения пучок, а добавочный луч по крайней мере не идет мимо.

У близко расположенных линз складываются оптические силы. Рассмотрим оптические свойства разнесенных линз. Как ни странно, система из двух линз f_1 и f_2 аналогична одной тонкой линзе, свойства которой зависят от f_1 , f_2 и расстояния между линзами d . Единственно, что расстояния A и B надо отмерять не от линз, а от некоторых **главных плоскостей**.

Найдем положение главных плоскостей и фокусное расстояние пары линз. Пусть для определенности расстояние $d < f_{1,2}$. Пустим слева параллельный пучок. Первая линза собирает его в фокус f_1 . Но стоящая на дороге вторая загнет лучи еще сильнее (рис. 3.7). Для нее «источник» находится на расстоянии $-(f_1 - d)$; знак обозначает правую сторону второй линзы. По формуле $-1/(f_1 - d) + 1/b = 1/f_2$.

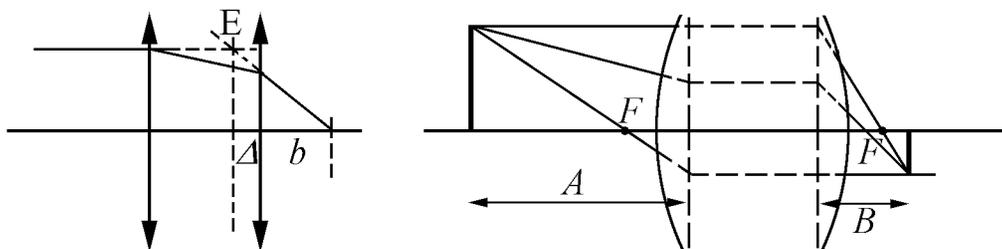


Рис. 3.7.

Получаем положение точки сбора лучей относительно второй линзы $b = f_2(f_1 - d)/(f_1 + f_2 - d)$. Теперь продолжим преломленный луч до пересечения с продолжением исходного параллельного оси луча. Расстояние от второй линзы до точки E пересечения $\Delta_2 = b f_1 / (f_1 - d) - b = d f_2 / (f_1 + f_2 - d)$. Если пустить параллельный пучок справа, аналогичная точка будет на расстоянии $\Delta_1 = d f_1 / (f_1 + f_2 - d)$ от первой линзы.

Вот это и будут главные плоскости: параллельный пучок для внешнего наблюдателя как бы преломляется один раз – в точке E – и дальше идет напрямик в фокус. Фокусное расстояние такой системы $F = b + \Delta = f_1 f_2 / (f_1 + f_2 - d)$ симметрично по отношению к перестановке линз и, значит, не зависит от направления пучка. Сумма $\Delta_1 + \Delta_2 = d(f_1 + f_2) / (f_1 + f_2 - d) > d$ при принятых ограничениях (когда линзы не слишком далеко), так что между главными плоскостями имеется область «перекрытия».

Правила построения в системе с различными главными плоскостями (рис. 3.7): параллельный оси луч ведется до главной плоскости, затем прыгает к другой плоскости и дальше ведется через фокус; луч, проходящий через фокус, доходит до главной плоскости, перепрыгивает на другую, сохраняя расстояние до оси, и идет параллельно. Все как в тонкой линзе, только выбрасывается расстояние между главными плоскостями.

Надо еще убедиться, что для составной системы выполняется формула линзы, то есть $1/A + 1/B = 1/F$, где $A = a + \Delta_1$ и $B = b + \Delta_2$ отмеряются от главных плоскостей. Для этого используем уже известный факт фокусировки параллельного пучка. Если луч на любой высоте h от оси приходит в фокус, то можно записать равенство оптических путей осевого и пробного луча:

$$\Delta(h) + F + \frac{h^2}{2F} = \Delta(0) + F,$$

где $\Delta(h)$ – разность хода, которая набирается в системе для пробного луча (по построению мы можем считать, что это происходит между главными плоскостями), $\Delta(0)$ – для осевого, $h^2/2F$ – геометрическое удлинение пути пробного луча. Теперь пускаем луч из точки A и допустим, что он приходит в точку B :

$$A + \frac{h^2}{2A} + \Delta(h) + \frac{h^2}{2B} + B = A + \Delta(0) + B.$$

Сравнивая с предыдущим уравнением, немедленно получаем

$$1/A + 1/B = 1/F,$$

что и требовалось. Для двух тонких разнесенных линз можно получить то же самое и прямым отображением в линзах по очереди, но вычисление довольно громоздкое.

В существовании главных плоскостей легко убедиться, выкрутив объектив фотоаппарата и фокусируя удаленный объект (типа Солнца). Отмерив от фокусов по 50 мм, увидим, что порядка сантиметра внутри объектива еще остается. Несмотря на внушительные порой размеры, объектив работает как тонкая линза (с учетом раздвижки главных плоскостей)! У одной тонкой линзы обе плоскости совпадают с самой линзой.

Если вернуться к микроскопу, то удобнее букву d заменить на длину тубуса L . Аналогичное построение для случая $L > f_1 + f_2$ дает

$$F = \frac{f_1 f_2}{L - f_1 - f_2}, \quad \Delta_1 = \frac{f_1(L - 2f_2)}{L - f_1 - f_2}, \quad \Delta_2 = \frac{f_2(L - 2f_1)}{L - f_1 - f_2},$$

причем главные плоскости расположены снаружи микроскопа вблизи фокусов окуляра и объектива (при $f_1 = f_2$ точно в фокусах). Так как обе линзы короткофокусные, $F \approx f_1 f_2 / L$, и микроскоп аналогичен лупе с таким фокусным расстоянием.

Интересная комбинация линз – **телескоп**. Простейший **кеплеровский** телескоп состоит из двух линз, фокусы которых совмещены ($d = f_1 + f_2$). Поскольку он применяется для рассмотрения удаленных объектов, играет роль угловое увеличение. Если параллельный пучок света идет под углом φ к оси, он сфокусируется в фокальной плоскости объектива (рис. 3.8). Далее лучи расходятся как бы из этой точки, и из второй линзы выходит опять параллельный пучок, но уже под углом $\varphi f_1 / f_2$. Действительно, проведем пунктирный (на самом деле несуществующий) луч через общий фокус параллельно центральному лучу пучка. Этот вспомогательный луч после окуляра идет параллельно оси. В задней фокальной плоскости окуляра он должен пересекаться с преломленным центральным лучом, что и помогает направить выходящий пучок.

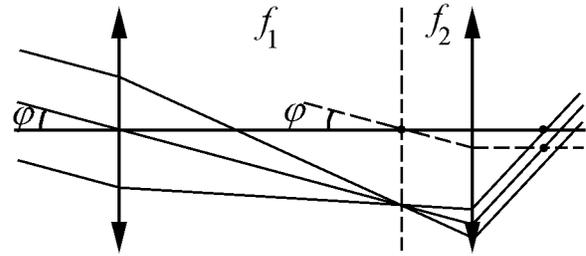


Рис. 3.8.

Делая окуляр короткофокусным, а объектив длиннофокусным, получаем большое угловое увеличение f_1 / f_2 . Например, угол φ может быть между двумя звездами, или деталями на поверхности Луны.

Такой телескоп переворачивает изображение, что неудобно почти всегда (например, в военном или морском деле). Исправить этот эффект можно, взяв третью линзу с фокусным расстоянием f_3 и увеличив длину телескопа на $4f_3$. Третья линза будет «связывать» фокусы окуляра и объектива, находясь на $2f_3$ от каждого. Поскольку увеличение для расстояния $2f_3$ равно 1, она будет только переворачивать изображение еще раз, устраняя неудобство простого телескопа. Получается очень длинная подзорная труба. В биноклях изображение переворачивается двумя призмами, отчего на них заметно характерное «колени». Объективы наиболее крупных телескопов (до 5 – 6 м в диаметре) делаются зеркальными, так как большие стеклянные линзы деформируются под собственной тяжестью.

Галилеевский телескоп состоит из длиннофокусного объектива и рассеивающей линзы – окуляра, помещенной на расстоянии $f_1 - |f_2|$ (рис. 3.9). Объектив пытается собрать параллельный пучок в фокальной плоскости, общей для обеих линз, а окуляр делает опять параллельный пучок, но идущий уже под углом к оси, увеличенным в $f_1 / |f_2|$ раз. Здесь вспомогательный луч проведен через центр окуляра и должен пересекаться с продолжением центрального луча в передней фокальной плос-

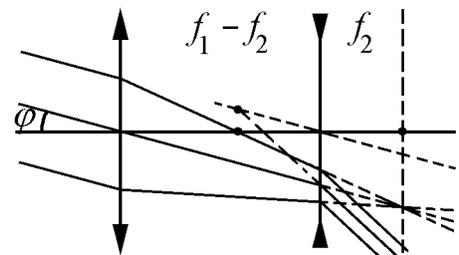


Рис. 3.9.

кости окуляра. Изображение не перевернутое; третья линза или призмы не нужны. Поскольку к тому же фокусные расстояния не складываются, а вычитаются, то система получается короче и используется, например, в театральные биноклях и в других случаях, когда компактность важнее качества изображения.

Увеличение бинокля или зрительной трубы примерно равно отношению диаметров объектива и окуляра, поскольку весь входящий пучок должен попасть в глаз.

Фотография. По существу, фотоаппарат отличается от глаза лишь техническим исполнением. Но только в последнее время удалось создать цифровые фотоаппараты, не уступающие глазу по качеству изображения и записывающие изображение примерно в такой же форме (набор электрических потенциалов в точках дискретной матрицы). Даже объективы стали, подобно глазу, изменять фокусное расстояние (вместо того чтобы, как в старину, только передвигаться как целое относительно пленки). Еще недавно даже фотограф-любитель владел массой технических знаний. Сейчас же каждый может навести фотоаппарат, нажать кнопку и получить приемлемый результат; искусство фотографии все больше смещается в сферу выбора кадра.

Голография получила развитие с появлением мощных источников когерентного света – лазеров. Пусть фотопластинка освещается одновременно пучком света (так называемым опорным), исходящим из лазера, и более слабым светом того же лазера, рассеянным на каком-то предмете (например, Вашем лице). На пластинке оба пучка дадут интерференционную картину, а после проявления получится соответствующая картина почернения. Где волны складывались, пластинка почернеет сильнее, где вычитались – слабее. Фазовые различия пучков запомнятся в виде причудливого узора.

Если теперь направить на проявленную пластинку один только опорный пучок, в самом грубом приближении получится ослабленный проходящий пучок, соответствующий среднему почернению. Это тривиально. Но оказывается, будет эффект и от структуры пластинки. Свет будет проходить лучше в светлых местах и слабее – в темных. Отклонения от среднего фона можно описать как распределение источников, находящихся в одной фазе, но имеющих разную амплитуду, по поверхности пластинки. По существу, получается дифракционная решетка.

Оказывается, в результате взаимодействия пучка с пластинкой появятся еще два пучка: один дает мнимое изображение предмета в том месте, где он был при съемке, а другой – действительное изображение предмета в симметричном относительно пластинки месте. Рассматривая точечный предмет, нетрудно убедиться, что для этих двух симметричных точек выполняется условие одинаковой разности хода лучей. Протяженные предметы можно считать наборами точек. Изображение получается объемным, и его можно, в определенных пределах, разглядывать с боков. Этим и объясняется название техники (ср. whole – весь, целый, полный). Еще интересно, что даже небольшая часть пластинки даст то же изображение, правда с некоторой потерей качества. Как мы уже видели, дифракционная решетка отклоняет лучи по тем же направлениям независимо

от размера, но расхождение этих пучков и, значит, резкость дифракционной картины обратно пропорциональны размеру решетки.

Томография стала актуальной в последние годы. Тела, непрозрачные для видимого света, можно просвечивать рентгеновскими лучами. Старые способы рентгенографирования давали плоский отпечаток на пленке. В каждой точке снимка запоминается интегральное поглощение вдоль луча, проведенного от источника к этой точке. Если же провести просвечивание с нескольких направлений и/или точек, становится возможно восстановить пространственную структуру тела. При этом необходимо решить большое количество интегральных уравнений, что стало доступным благодаря развитию компьютеров и математического обеспечения. Обычно результатом исследования является представление объекта в виде набора слоев, откуда и идет название метода (греч. *τομος* – сечение, слой, ломоть; микротом – прибор для шинкования биологических образцов). В медицине рентгеновская и ЯМР-томография позволяют обнаружить неоднородности типа раковых опухолей, инородные тела и пр., не разрезая пациента. Вероятно, почти каждому, кто читает этот текст, предстоит хотя бы раз пройти томографическое обследование.

3.5 Пределы увеличения. Условие Аббе. Возможности оптики

Выясним ограничения на увеличение микроскопа. В формулу увеличения $Y/X = (LL_{25})/(f_1 f_2)$ входит длина тубуса L ; при тубусе длиной 10 м и фокусных расстояниях объектива и окуляра 1 см увеличение будет 25000. Еще имеется некоторая свобода для роста увеличения.

Поскольку для большого увеличения предмет следует располагать близко к фокусу, а фокусное расстояние делать по возможности малым, надо рассмотреть особенности изображения широкими пучками лучей. Для источника, находящегося на оси, желательно, чтобы все лучи, а не только близкие к оси, сходились в точке изображения. Ясно, что зеркало или линза со сферическими поверхностями таким свойством не обладает – имеется **сферическая аберрация**. Особенно очевидна она для зеркала в виде полусферы. Для зеркальной фокусировки параллельного пучка подходящая поверхность – параболоид, а для двух точек – эллипсоид вращения, у которого источник и изображение являются фокусами. У линз тоже можно компенсировать сферическую аберрацию, немного регулируя кривизну поверхности.

Но сферическая аберрация – это не единственная неприятность. Для неискаженности изображения все точки предмета, или хотя бы близкие к оси, должны изображаться резко любыми лучами, в том числе сильно наклонными. Другими словами, все части оптической системы должны давать одинаковое увеличение. Возьмем «предмет» в виде

малого отверстия в экране, с центром на оси линзы, освещаемого слева параллельным пучком. За линзой получится перевернутое изображение (рис. 3.10). Лучи 1 и 2, прошедшие от краев предмета через центр линзы, проходят до точек изображения одинаковые оптические пути (не потому, что они интерферируют между собой – они идут в разные точки изображения – а просто из симметрии).

По принципу Ферма, такими же должны быть оптические пути всех лучей, попадающих в концы изображения. Возьмем пару лучей от краев источника, идущих под углом φ_1 к оси и проходящих, возможно, вблизи края линзы. Перед линзой у них будет разность хода $d \sin \varphi_1$ (нижний длиннее). После линзы лучи пересекаются в фокальной плоскости и приходят на изображение с разностью хода $y \sin \varphi_2$, но уже длиннее верхний. (Считаем пучок тонким, так что углы лучей 3 и 4 к оси оба практически равны φ_2). Линза сама не дает разности хода, так что эти отклонения должны взаимно компенсироваться. Путь 3 должен интерферировать с путем 2, а путь 4 – с путем 1:

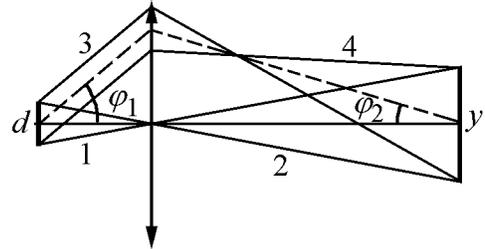


Рис. 3.10.

$$d \sin \varphi_1 = y \sin \varphi_2$$

(условие синусов Аббё). Оно должно выполняться для всех углов, в том числе максимальных.

Для школьной геометрической оптики с близкими к оси лучами, то есть когда линзы не только тонкие, но и маленькие, синусы можно заменить углами или тангенсами. Тогда условие переходит в $dh/a = yh/b$, где h – высота прохода луча через линзу. Получаем известную формулу увеличения: $d/a = y/b$, которая выполняется автоматически, для всех положений предмета на оси.

Условие Аббе для широких пучков уже нетривиально и выполняется в лучшем случае для пары точек на оси. Пример (из книги: М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики): тонкая линза с фокусом f из стекла с $n = 1,5$, если мы хотим изобразить предмет, находящийся в бесконечности, должна иметь радиусы кривизны $5f$ и $5f/9$, причем более выпуклой стороной обращена к предмету. Сферическая aberrация устраняется теперь небольшими поправками к форме поверхности (кривизна несколько уменьшается с удалением от оси). Уравнение поверхности сферы вблизи полюса $x = r^2/2R + r^4/8R^3$, а надо взять в данном случае $x = r^2/2R + 0,26r^4/8R^3$.

Бывает, что вообще не удастся убрать одновременно сферическую aberrацию и выполнить условие Аббе. Например, зеркало без сферической aberrации – это эллипсоид. Но эллипсоид с очевидностью не дает одинаковых увеличений для всех углов: один его полюс делает изображение меньше предмета, а другой – больше.

Всего при рассмотрении первых поправок к простейшей оптике возникает шесть видов aberrаций. Кроме сферической, имеется кома (исчезающая при выполнении усло-

вия синусов), астигматизм, кривизна поля изображения, дисторсия и хроматическая aberrация. Поэтому объективы делаются многолинзовыми, причем исправление одной aberrации может увеличить другие. Остается удивляться хорошему качеству изображения фотоаппаратов (и телевизоров, с их электронной оптикой). Глаз почти ни на что не исправлен, и неискаженное изображение получается пересчетом в мозгу (что зависит также, видимо, от жизненного опыта).

Перейдем к увеличению микроскопа. На его объективе происходит дифракция с минимально разрешаемым углом λ/d и соответствующим размером изображения $L\lambda/d$. По условию Аббе, для минимально различаемого размера предмета $x \sin \varphi_{max} = (L\lambda/d) \cdot (d/2L)$, где $d/2L$ – синус малого угла, под которым изображению видна линза объектива. Получаем $x \sim \lambda/(2 \sin \varphi_{max})$, то есть нельзя различать предметы меньше примерно длины волны. Заметим, что в школьном приближении вместо синуса стоит тангенс, и ограничение исчезает. Мы хорошо видим глазом ~ 1 мм, и для наблюдения предмета порядка $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см нужно увеличение порядка 1000. Поэтому оптические микроскопы и не делают длиной в 10 м – в них мы увидели бы большие, но совершенно не похожие на предмет изображения.

Для наблюдения очень мелких предметов нужно уменьшить длину волны (ультрафиолетовая микроскопия). Пока плохо идет рентгеновская оптика, но применяются электронные и ионные микроскопы до размеров, уже приближающихся к ангстрем (атомных). Поскольку электрон в атоме как раз локализован в таком размере, возникает новая проблема – разрушение объектов «взглядом» (точнее, освещением).

Хотя форма малых предметов перестает улавливаться, заменяясь на дифракционное пятно, свет сам по себе виден, и на темном поле присутствие мелких частиц наблюдается (ультрамикроскопия). Применяется и освещение предмета через тонкую трубочку размером, скажем, 100 Å, и запись отраженного сигнала при сканировании. Здесь дифракционные ограничения заменяются очень сложными технологическими.

Рекордно малые объекты сейчас наблюдают в сканирующих туннельных и атомно-силовых микроскопах. Первые регистрируют ток с острой иглы на поверхность подложки при напряжении в несколько вольт. Ток этот, называемый туннельным, идет прямо через вакуумный зазор и возможен потому, что электрон – тоже волна и может просачиваться через потенциальные барьеры. Игла «ездит» в двух направлениях вдоль поверхности под действием пьезоэлементов. Всякий выступ, например, отдельный атом, вызывает увеличение тока, и на экране компьютера появляется цветное пятно. Атомно-силовой прибор визуализирует притяжение иглы к поверхности, и тоже различает отдельные атомы. Те же иглы позволяют перемещать атомы по подложке, составляя из них рисунки и надписи.

Оценим максимальное увеличение телескопа. Сомнительно, чтобы не было никакого предела, кроме технического, определяемого отношением фокусных расстояний (или длины телескопа к f_2 окуляра). На входном зрачке (линзе или зеркале) диаметра

d свет испытывает дифракцию. Угол центрального максимума, в котором содержится большая часть света, $\theta_0 \sim \lambda/d$. Поэтому телескоп не сможет разделить две звезды, угловое расстояние между которыми меньше θ_0 . Их изображения в фокальной плоскости будут накладываться. Увеличивая углы в $\Gamma = f_1/f_2$ раз, получим хоть и большое, но искаженное изображение.

Звезда типа Солнца (диаметр 1,5 млн км) с расстояния 4 св. года $= 4 \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ с} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ км/с} = 3,6 \cdot 10^{13} \text{ км}$ видна под углом $4 \cdot 10^{-8}$. Чтобы разрешить ее диск, нужен телескоп с таким же отношением λ/d , то есть $d \approx 12 \text{ м}$. Сейчас это технически достижимо, поскольку успехи информатики позволяют объединять изображения от нескольких больших зеркал. Однако на Земле наблюдению мешает атмосфера. Преломление света на флуктуациях плотности приводит к размытию изображения, заметно большему дифракционного предела. Сейчас на орбите работает 2400 мм «хаббловский» телескоп⁶, который на 1993 г. дал разрешение лучше земных ($0,007'' \approx 3,4 \cdot 10^{-8}$). Это выше дифракционного предела для типичного видимого света $\lambda/d \approx 5 \cdot 10^{-5}/240 = 2 \cdot 10^{-7}$ благодаря возможности (недоступной на Земле) работать в ультрафиолетовом диапазоне. Получается, что диск звезды виден «на пределе». Видеть же планеты, как имеющие размер объекты, даже у ближайших звезд тем более пока невозможно.

Тем не менее число обнаруженных вне Солнечной системы планет уже исчисляется сотнями (по <http://www.obspm.fr/encycl/encycl.html> 153 планеты в 134 планетных системах на 14 февраля 2005; по <http://planetquest.jpl.nasa.gov/> 145 планет на 21 февраля 2005). Большая часть из них выявлена по возмущениям движения звезд, а меньшая – в некотором смысле видна, но способами, далекими от прямого визуального наблюдения. Скажем, замечают слабые изменения светимости при «затмении» звезды планетой. На пределе удастся увидеть и отраженный планетой свет, если заблокировать свет звезды (который сильнее в миллионы или миллиарды раз); этот способ похож на ультрамикроскопию. Сейчас крупнейший земной телескоп расположен на горе Мауна Кеа (о. Гавайи). Собственно, это два десятиметровых зеркала, каждое из 36 гексагональных сегментов, разнесенных на расстояние 85 м. Это и позволяет использовать машину как интерферометр, в частности, вычитанием сигналов «отключать» свет звезды. База интерферометра позволяет получить угловое разрешение в тысячные доли угловой секунды ($\approx 10^{-8}$).

Спутник, летающий на высоте 200 км и снабженный оптикой со входным зрачком 20 см, различает углы $\lambda/d \sim 2,5 \cdot 10^{-6}$, что соответствует расстоянию между деталями на Земле $2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^3 = 0,5 \text{ м}$.

⁶Телескоп планировалось запустить в 1986 г. Однако из-за гибели шаттла «Challenger» в январе этого года запуск был отложен до апреля 1990, вывод на орбиту осуществлял шаттл «Discovery». Только после запуска обнаружилась небрежность сборки – плоскость, где фиксировалось изображение, располагалась немного не в фокусе. В декабре 1993 года неисправность была устранена прямо на орбите, для чего запускался шаттл «Endeavour»; космическими ремонтниками были Story Musgrave и Jeffrey Hoffman.

Оптический вечный двигатель второго рода. Линза, дающая изображение Солнца, собирает лучи с большой поверхности в малое пятно. Можно ли получить более высокую температуру, чем на Солнце? Солнце излучает $4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$ энергии, и на орбите Земли через линзу радиуса r пройдет $4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \cdot \pi r^2 / (4\pi L^2)$ эрг/с. Здесь R – радиус Солнца, L – расстояние до него. Весь этот свет сконцентрируется в пятно площадью $\pi(Rf/L)^2$, и на единицу поверхности будет падать $\sigma T^4 r^2 / f^2$ эрг/с. В равновесии изображение должно излучать столько же: σT_1^4 , и если $r > f$, то температура экрана T_1 в этом месте будет больше. Ставим тепловую машину, в которой нагревателем служит изображение Солнца, а холодильником само Солнце, и извлекаем работу.

Из второго закона термодинамики сомнительно, чтобы такой проект получился. Но физический этикет требует доказать неработоспособность любого вечного двигателя в рамках постановки, в данном случае – в оптике. Угол $\varphi_2 = \arctg(r/f)$ со стороны изображения получается большой, $\varphi_2 > \pi/4$, и приближение малых углов не работает. Как это повлияет на результат?

Трудно сомневаться, что на 1 см^2 изображения приходится $\sigma T^4 \cdot (R^2/L^2) \cdot (\pi r^2/\pi y^2)$, где y – радиус изображения. Как раз его мы определили неправильно: $y \neq fR/L$! Если наша линза хорошая, то есть изображает Солнце широким пучком резко, то должно выполняться условие Аббе: $Rr/L = y \sin \varphi$. Получаем $y = Rr/(L \sin \varphi)$. Подставим в выражение для потока энергии:

$$\sigma T^4 \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \frac{\pi r^2 L^2 \sin^2 \varphi}{\pi R^2 r^2 y^2} = \sigma T^4 \cdot \sin^2 \varphi = \sigma T_1^4.$$

Видно, что температура изображения всегда меньше.

Повторим подобные же рассуждения более последовательно. Малый участок ΔS_1 светящегося предмета с яркостью B_1 излучает в телесный угол $\Delta \Omega$ мощность $B_1 \Delta S \cos \varphi \cdot \Delta \Omega$. Напомним, что для черного тела, вроде Солнца, $B = \sigma T^4/\pi$; здесь применяем не визуальную, а энергетическую яркость. Для света, приходящего на линзу под углом φ , $\Delta \Omega = 2\pi \sin \varphi \cdot \Delta \varphi$, так что к линзе подается мощность $2\pi \int B \Delta S \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi B_1 \Delta S_1 \sin^2 \varphi_1$. Можно ввести понятие яркости изображения B_2 , по энергии приходящего света (она, пройдя место фокусировки, будет распространяться как от источника с такой яркостью). Аналогично мощность, сходящаяся к изображению, будет $\pi B_2 \Delta S_2 \sin^2 \varphi_2$, и может быть только меньше из-за потерь в линзе. Площади пропорциональны квадратам размеров: $\Delta S_1 = x^2$, $\Delta S_2 = y^2$. По условию синусов, если мы желаем получить резкое изображение, $x \sin \varphi_1 = y \sin \varphi_2$, так что $B_2 = B_1$. Реально в линзе часть энергии теряется, и $B_2 < B_1$.

Как и в случае с разрешением микроскопа, учет условия синусов вместо бездумного применения школьных формул исправляет положение. Яркость или температура в фокусе линзы всегда меньше, чем у излучающего предмета. На этом обыкновенно останавливаются, предпочитая не замечать возможности фокусировки без выполнения условия Аббе. Заранее не очевидно, что плохое изображение всегда будет менее ярким.

Но это уже примем без доказательства.

В отсутствии усиления яркости легко убедиться, посмотрев через линзу на протяженный светящийся объект (небо, экран телевизора). Яркость участка, наблюдаемого мимо линзы, на глаз такая же, как участка, видимого через линзу. Хотя линза уменьшает изображение (концентрирует свет), она увеличивает телесный угол (растягивает этот концентрированный свет по большому интервалу углов). Освещенность же в фокусе, разумеется, возрастает по сравнению с освещенностью без линзы, почему линза и позволяет зажигать бумагу и т.п.

Другое дело – свет от точечных источников, типа звезд. Телескоп вместо точки рисует дифракционный кружок, в который при росте диаметра зеркала попадает больше световой энергии. Пока звезды остаются точками, растяжения их телесного угла не происходит. Поэтому в большой телескоп видно больше звезд. В принципе, можно видеть через телескоп звезды и днем, так как фон неба не увеличивается, а яркость изображений звезд растет пропорционально площади объектива.

Улучшение видимости через зрительную трубу или бинокль в сумерках («ночезрительная труба» по М.В.Ломоносову) чисто физиологическое. При слабом свете падает разрешающая способность глаза – от $1'$ до 1° . Труба, уменьшая несколько яркость, дает более крупное изображение на сетчатке. Тоже физиологией объясняется опасность наблюдения Солнца в бинокль – организм не справляется с действием яркого пятна большой площади на сетчатку.