МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра математики

В.Ф.Бутузов, А.А.Быков, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (3 СЕМЕСТР)

Москва-2008

Тема 1. Поверхностные интегралы.

1. **Определения.**
   1.1. Сформулируйте определение площади поверхности.
   1.2. Сформулируйте определение поверхностного интеграла первого рода.
   1.3. Сформулируйте определение поверхностного интеграла второго рода.
2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**
   2.1. Запишите формулу площади поверхности, заданной уравнением $z = h(x,y), \quad (x,y) \in D$, и сформулируйте условия ее применимости.
   2.2. Запишите формулу площади поверхности, заданной параметрически, и сформулируйте условия ее применимости.
   2.3. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma$ при условии, что поверхность S задана в виде $z = h(x,y), \quad (x,y) \in G,\ G$ – область на плоскости (x,y).
   2.4. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме.
   2.5. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\gamma\,d\sigma$ при условии, что поверхность S задана в виде $z = h(x,y), \quad (x,y) \in G,\ G$ – область на плоскости (x,y), γ - угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Oz.
   2.6. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\alpha\,d\sigma$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме, $\alpha -$ угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Ox.
   2.7. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$ при условии, что поверхность S задана в параметрической форме.
   2.8. Запишите формулу Стокса и сформулируйте достаточные условия её применимости.
   2.9. Запишите формулу Остроградского-Гаусса и сформулируйте достаточные условия её применимости.

3. **Теоремы с доказательством.**
   3.1. Докажите теорему о вычислении площади поверхности, заданной уравнением $z = h(x,y), \quad (x,y) \in D$.
   3.2. Докажите, что если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma$ существует. Требования к поверхности S сформулируйте самостоятельно.
   3.3. Докажите, что если функция $P(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\,d\sigma$ существует. Требования к поверхности S сформулируйте самостоятельно.

3.4. Докажите теорему о формуле Стокса.
3.5. Докажите теорему о формуле Остроградского-Гаусса.
3.6.Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке М:

4.1.1. $S: z = x^2 + y^2$; $M(3,4,25)$;

4.1.2. $S: x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2$, $M(1,1,0)$;

4.1.3. $S: x = 2uv$, $y = u + v$, $z = u^2 + v^2$, $M(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, *где* $u_0 = 1$, $v_0 = -1$.

4.2. Найдите площадь поверхности с помощью двойного интеграла:

4.2.1. $z = 3x + 4y$, $x^2 + y^2 \le 1$;

4.2.2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$;

4.2.3. $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$;

4.2.4. $z = xy$, $x^2 + y^2 \le a^2$;

4.2.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le \dfrac{1}{2}$;

4.2.6. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v, 0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi$.

4.3.Вычислите поверхностный интеграл I рода.

4.3.1. $\iint_S dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$;

4.3.2. $\iint_S (x + y + z) dS$, где поверхность $S:$ $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$;

4.3.3. $\iint_S (x + y + z) dS$, где поверхность $S:$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cap z \ge 0$;

4.3.4. $\iint\limits_S (x^2 + y^2) ds$, где S – граница тела $V = \{(x,y,z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$;

4.3.5. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z - \dfrac{1}{2}) ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$.

4.4. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ с помощью поверхностного интеграла.

4.5. Вычислите поверхностный интеграл второго рода, не пользуясь формулой Остроградского-Гаусса:

4.5.1. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью Oz;

4.5.2. $\iint\limits_S (y^2 + z^2) dxdy$, где S - часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le y \le b$;

4.5.3. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz);

4.5.4. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S - часть внутренней стороны гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1, 0\le z\le 3$;

4.5.5. $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$;

4.6. Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислите интеграл:

4.6.1. $\iint\limits_S (x+e^y)dydz+(y-e^z)dxdz+(z+e^x)dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$;

4.6.2. $\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)ds$, где S – гладкая поверхность, ограничивающая область D, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют в $\overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка.

4.6.3. $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S - внутренняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

4.6.4. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S - внешняя сторона поверхности тела $\left\{x^2+y^2\le z\le H\right\}$;

4.6.5. $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$, $z\in[-1;1]$.

4.7. Используя формулу Стокса, вычислите интеграл:

4.7.1. $\int\limits_{AB}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$, где AB есть отрезок винтовой линии $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ от точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,h)$.

4.7.2. $\oint\limits_L y^2dx+xydy+(x^2+y^2)dz$, где L – замкнутый контур, образованный при пересечении трех плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=a$ с эллиптическим параболоидом $x^2+y^2=az$, причем $x\ge 0$, $y\ge 0$ ($a>0$). Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,2a)$.

4.7.3. $\oint\limits_L xdx+xdy+zdz$, где L – окружность, образованная при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=8$ и плоскости $x=z$. Обход окружности совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,0,5)$.

4.7.4. $\oint\limits_{L}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, где L – эллипс, образованный при пересечении цилиндрической поверхности $x^2+y^2=a^2$ и плоскости $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ ($a>0$, $h>0$), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a,0,0)$.

4.8. Найдите поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали к S:

4.8.1. $\vec{F}=\left\{-x^3,-y^3,-z^3\right\}$, S — поверхность куба $\left\{0\le x\le a,\;\; 0\le y\le a,\;\; 0\le z\le a\right\}$;

4.8.2. $\vec{F}=\left\{0,y^3,z\right\}$, S — часть параболоида $z=x^2+y^2,\;\; 0\le z\le 2$.

4.9. Докажите, что объём V тела, ограниченного гладкой поверхностью S, выражается формулой $V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

4.10. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, сведите к тройному интегралу поверхностный интеграл $\iint\limits_{S}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)ds$, где S — гладкая поверхность, ограничивающая конечную область D, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S, $u(x,y,z)$ имеет в $\bar{D}$ непрерывные частные производные второго порядка.

4.11. Найдите момент инерции относительно оси Oz части конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2x$. Поверхностная плотность $\rho=x$.

4.12. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$, $y\ge 0$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2x$. Поверхностная плотность $\rho=zy$.

4.13. Пользуясь формулой Стокса, найдите циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\left\{z^3,x^3,y^3\right\}$ вдоль контура, образованного при пересечении гиперболоида $2x^2+z^2-y^2=a^2$ и плоскости $x+y=0$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0,2a,0)$.

4.14. Найдите работу силового поля $\vec{F}=\{x+3y+2z,2x+z,x-y\}$ вдоль замкнутого контура *MNPM*, где *MNP* — треугольник с вершинами в точках $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$, $P(0,0,1)$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(5,5,5)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если S – гладкая поверхность, ограничивающая некоторое тело, $\vec{l}$ – постоянный вектор, $\vec{n}$ - вектор нормали к поверхности S, φ – угол между векторами $\vec{l}$ и $\vec{n}$, то $\iint\limits_{S}\cos\varphi dS=0$.

5.2. Докажите формулу $\iiint\limits_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint\limits_S \cos\alpha ds$, где S –поверхность, ограничивающая тело V, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, $\vec{r}$ — радиус-вектор, идущий от точки (x,y,z), лежащей внутри V, к точке (ξ,η,ζ), α — угол между вектором $\vec{r}$ и внешней нормалью $\vec{n}$ к поверхности S.

5.3.Докажите, что если S – гладкая поверхность, ограничивающая тело V, и $u(x,y,z)$ имеет в $\bar{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, то $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint\limits_V \Delta u dxdydz$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к поверхности S, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

5.4. Докажите, что если S – гладкая поверхность, ограничивающая тело V и $u(x,y,z)$ имеет в $\bar{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, .то

$$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint\limits_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right) dxdydz + \iiint\limits_V u\Delta u dxdydz,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к поверхности S, Δ − оператор Лапласа.

Тема 2. Скалярные и векторные поля.

1. **Определения.**

1.1. Сформулируйте определение градиента скалярного поля в декартовой системе координат.
1.2. Сформулируйте определение дивергенции векторного поля в декартовой системе координат.
1.3. Сформулируйте определение ротора векторного поля в декартовой системе координат.
1.4. Сформулируйте инвариантное определение дивергенции.
1.5. Сформулируйте инвариантное определение ротора.
1.6.Сформулируйте определение циркуляции векторного поля вдоль кривой.
1.7. Сформулируйте определение потока векторного поля через заданную сторону поверхности.
1.8.Сформулируйте определение потенциального векторного поля.
1.9.Сформулируйте определение соленоидального векторного поля.

2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**

2.1.Сформулируйте свойства потенциального векторного поля.
2.2. Сформулируйте свойства соленоидального векторного поля.
2.3. Сформулируйте теорему о представлении векторного поля как суммы потенциального и соленоидального полей.
2.4.Запишите формулу для $\mathrm{grad}\, u$ в криволинейных ортогональных координатах.
2.5. Запишите формулу для $\mathrm{div}\,\vec{a}$ в криволинейных ортогональных координатах.
2.6. Запишите формулу для $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ в криволинейных ортогональных координатах.

3. **Теоремы с доказательством.**

4. **Вопросы и задачи.**

4.1. Найдите угол между:

4.1.1. Градиентами функций $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ и
$v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$ в точке $M(3,5,4)$.

4.1.2. Градиентами скалярного поля $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках
$M_1(1,2,2)$ и $M_2(-3,1,0)$.

4.2. Вычислите, если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,
$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянные векторы:

4.2.1. $\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right)$;

4.2.2. $\operatorname{div}\vec{r}$, $\operatorname{div}(r\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^2\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^{-1}\vec{r})$, $\operatorname{div}(r^{-2}\vec{r})$;

4.2.3. $\operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})$;

4.2.4. $\operatorname{div}(r\vec{c})$, $\operatorname{div}(\vec{b}(\vec{r},\vec{c}))$;

4.2.5. $\operatorname{rot}\vec{r}$, $\operatorname{rot}(r\vec{r})$, $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;

4.2.6. $\operatorname{div}[\vec{c} \times \vec{r}]$;

4.2.7. $\operatorname{rot}[\vec{c} \times \vec{r}]$.

4.3. Вычислите $\operatorname{grad}(uv)$, $\operatorname{grad}(u^2)$, $\operatorname{grad} f(u)$, $\operatorname{grad}(\sin u)$, $\operatorname{grad}\dfrac{1}{u}$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля.

4.4. Применяя оператор Гамильтона, докажите следующие соотношения, если u – дифференцируемое скалярное поле, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – дифференцируемые векторные поля:

4.4.1. $\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\operatorname{grad} u \cdot \vec{a}) + u \operatorname{div} \vec{a}$;

4.4.2. $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = [\operatorname{grad} u \cdot \vec{a}] + u \operatorname{rot}\vec{a}$;

4.4.3. $\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot}\vec{b}$.

4.5. Используя оператор Гамильтона ∇, докажите следующие соотношения, если u и v – дважды дифференцируемые скалярные поля, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - дважды дифференцируемые векторные поля, Δ - оператор Лапласа:

4.5.1. $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u\Delta v$;

4.5.2. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta\vec{a}$;

4.5.3. $\operatorname{rot}\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b} + \vec{a} \operatorname{div}\vec{b} - \vec{b} \operatorname{div}\vec{a}$;

4.5.4. $\operatorname{grad}\left(\vec{a},\vec{b}\right) = (\vec{a},\nabla)\vec{b} + \left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a} + \left[\vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b} \times \operatorname{rot}\vec{a}\right]$.

4.6. Вычислите $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u$, где u – дважды дифференцируемое скалярное поле.

4.7. Вычислите $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$, где $\vec{a}$ – дважды дифференцируемое векторное поле.

4.8. Вычислите дивергенцию электрического поля $\vec{E}$ точечного заряда e, помещенного в точку (x_0, y_0, z_0).

4.9. Вычислите ротор векторного поля $\vec{a} = x\mathbf{i} + \dfrac{y}{y^2 + z^2}\mathbf{j} - \dfrac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$ в точках, где $y^2 + z^2 \neq 0$, и циркуляцию этого поля вдоль окружности $L : \left\{y^2 + z^2 = 1,\ x = x_0\right\}$.

4.10. Найдите поток векторного поля $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: а) через внешнюю сторону боковой поверхности конуса $x^2 + y^2 \le z^2$ ($0 \le z \le h$); б) через внутреннюю сторону основания этого конуса.

4.11. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ в направлении внешней нормали к поверхности: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \le a^2$ ($0 \le z \le h$); б) через полную поверхность этого цилиндра.

4.12. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$ в направлении внешней нормали к поверхности.

4.13. Проверьте, что векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным и найдите его скалярный потенциал:

4.13.1. $\vec{a} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$;

4.13.2. $\vec{a} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ ($x^2 + y^2 \ne 0$);

4.13.3. $\vec{a} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$.

4.14. Убедитесь, что векторное поле $\vec{a} = \dfrac{2}{(y+z)^{1/2}}\mathbf{i} - \dfrac{x}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{j} - \dfrac{y}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{k}$ является потенциальным и найдите работу этого поля вдоль пути, соединяющего точки $M\left(1,1,3\right)$ и $N\left(2,4,5\right)$ и расположенного в октанте $x > 0, y > 0, z > 0$.

4.15. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = ye^{x^2}\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - \left(2xyze^{x^2} + z^2\right)\mathbf{k}$ является соленоидальным.

5. **Задачи повышенной трудности.**

5.1. Вычислите, если

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ – постоянный вектор:

5.1.1. $\operatorname{div}\left(r^5(\vec{a},\vec{r})\vec{r}\right)$;

5.1.2. $\operatorname{rot}\left(r^5(\vec{a},\vec{r})\vec{r}\right)$;

5.1.3. $\operatorname{rot}\left(r(\vec{a},\vec{r})\vec{r}\right)$;

5.1.4. $\operatorname{grad}\left(r\cdot(\vec{a},\vec{r})^7\right)$;

5.1.5. $\operatorname{grad}\left(r^7(\vec{a},\vec{r})\right)$;

5.1.6. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(r^4\right)$;

5.1.7. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left((\vec{a},\vec{r})^5\right)$;

5.1.8. $\operatorname{grad}\left(r\cdot(\vec{a},\vec{r})^4\right)$;

5.1.9. $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(r^2(\vec{a},\vec{r})\right)$;

5.1.10. $\operatorname{div}\left(r^2(\vec{a},\vec{r})\cdot\vec{r}\right)$.

5.2. Разложите векторное поле $\vec{a} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}$ на сумму потенциального и соленоидального полей.

5.3. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ является соленоидальным, и найдите его векторный потенциал.

Тема 3. Функциональные последовательности и ряды.

1 Определения.

1.1. Сформулируйте два определения равномерной сходимости функциональной последовательности.

1.2. Сформулируйте определение равномерной сходимости функционального ряда.

1.3. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости функциональной последовательности.

1.4. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости функционального ряда.

1.5. Сформулируйте определение сходимости в среднем функциональной последовательности.
1.6. Сформулируйте определение сходимости в среднем функционального ряда.
1.7. Сформулируйте определение равномерно ограниченной функциональной последовательности.
1.8. Сформулируйте определение равностепенно непрерывной функциональной последовательности.

2 Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
2.2. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
2.3. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
2.4. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости функционального ряда.
2.5. Сформулируйте теорему о непрерывности предела функциональной последовательности.
2.6. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы функционального ряда.
2.7. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком производной для функциональной последовательности.
2.8. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.
2.9. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком интеграла для функциональной последовательности.
2.10. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
2.11. Сформулируйте теорему Арцела.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Докажите необходимость условия Коши.
3.2. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Докажите необходимость условия Коши.
3.3. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Докажите достаточность условия Коши.
3.4. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Докажите достаточность условия Коши.
3.5. Докажите теорему о мажорантном признаке Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
3.6. Докажите теорему о признаке Дирихле-Абеля равномерной сходимости функционального ряда
3.7. Докажите теорему о непрерывности предела функциональной последовательности.
3.8. Докажите теорему о непрерывности суммы функционального ряда.
3.9. Докажите теорему о переходе к пределу под знаком производной для функциональной последовательности.
3.10. Докажите теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.
3.11. Докажите теорему о переходе к пределу под знаком интеграла для равномерно сходящейся функциональной последовательности.
3.12. Докажите теорему о переходе к пределу под знаком интеграла для функциональной последовательности, сходящейся в среднем.
3.13. Докажите теорему о почленном интегрировании функционального ряда, сходящегося в среднем.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном промежутке:

4.1.1. $f_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$;

4.1.2. $f_n(x) = \arcsin(x^n)$, $x \in (0,1)$;

4.1.3. $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n)$, $x \in (0,1)$;

4.1.4. $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in (0,1)$;

4.1.5. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$, $x \in (0,1)$;

4.1.6. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$, $x \in (-\infty;+\infty)$;

4.1.7. $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in (-\infty;+\infty)$;

4.1.8. $f_n(x) = \ln(1-x^n)$, $x \in (0,1)$;

4.1.9. $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $x \in (-\infty;+\infty)$;

4.1.10. $f_n(x) = e^{-nx}$ а) $x \in (0,1)$; б) $x \in [1,\infty)$;

4.1.11. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0;1]$;

4.1.12. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$, $x \in (-\infty;+\infty)$;

4.1.13. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $x \in [1;+\infty)$; б) $x \in [0;1]$;

4.1.14. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$, $x \in [0;+\infty)$;

4.1.15. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^4x^4}$, $x \in (-\infty;+\infty)$.

4.2. Докажите, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на сегменте $[0;1]$, но $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

4.3. Докажите, что последовательность $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n)$ сходится равномерно на $(-\infty;+\infty)$, но $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'\Big|_{x=1} \ne \lim\limits_{n\to\infty}\left(f_n'(x)\Big|_{x=1}\right)$.

4.4. Докажите, что последовательность $f_n(x) = x^2 + \dfrac{1}{n}\sin n\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ сходится равномерно на $(-\infty;+\infty)$, но соотношение $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ не имеет места.

4.5. Определите область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$.

4.6. Определите область абсолютной и условной сходимости функционального ряда:

4.6.1. $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\sin k}{k^x}$;

4.6.2. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k^x+(-1)^k}$.

4.7. Исследуйте ряд на равномерную сходимость.

4.7.1. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} e^{-kx}$, $x \in (0;+\infty)$;

4.7.2. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(2kx)}{k\sqrt{k}}$, $x \in (-\infty;+\infty)$;

4.7.3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$, $x \in (-\infty;+\infty)$;

4.7.4. $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}$, $x \in [0;+\infty)$;

4.7.5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$, $0<\varepsilon<\pi$.

4.8. Определите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

4.8.1. $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}x^k$;

4.8.2. $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}x^k$;

4.8.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3+(-1)^n\right)^n}{n}x^n$.

4.9. Укажите область определения функции $f(x)$ и исследуйте функцию на непрерывность:

4.9.1. $f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}$,

4.9.2. $f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{k^x}$.

4.10. Докажите, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на интервале $(-\infty;\infty)$.

4.11. Найдите сумму степенного ряда и укажите область сходимости:

4.11.1. $\sum_{k=1}^{+\infty}x^k$;

4.11.2. $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$;

4.11.3. $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$;

4.11.4. $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$;

4.11.5. $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$;

4.11.6. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.

4.12. Получите разложение в степенной ряд функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Указание: сначала разложите в степенной ряд производную $f(x)=\operatorname{arctg}x$, а потом примените почленное интегрирование.

4.13. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке и в среднем на сегменте $[0;1]$ к функции $f(x)=0$.

4.14. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=nx^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке сегмента $[0;1]$ к функции $f(x)=0$ и не сходится в среднем на сегменте $[0;1]$ к этой функции.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x)=x^n$ на промежутке $x\in[0,1]$.

5.2. При каких значениях параметра α последовательность $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ (a) сходится на сегменте $[0;1]$, (b) сходится равномерно на сегменте $[0;1]$?

5.3. Докажите, что функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ на промежутке $x\in(-1;1)$ не является равномерно сходящимся.

5.4. Докажите, что функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ на промежутке $x\in(-1;1)$ не является равномерно сходящимся.

5.5. Докажите, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$ на промежутке $x\in(0;1)$ не является равномерно сходящимся.

5.6.Докажите, что функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k kx^k$ на промежутке $x\in(-1;1)$ не является равномерно сходящимся.

5.7.Исследуйте сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости:

5.7.1. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}x^k$;

5.7.2. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}x^k$;

5.7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3+(-1)^n\right)^n}{n}x^n$.

5.8. Приведите пример функциональной последовательности, которая сходится к функции $f(x)$ в каждой точке сегмента $[a,b]$, но не сходится к $f(x)$ в среднем на $[a,b]$.

5.9. Приведите пример функциональной последовательности, которая сходится в среднем к некоторой функции на сегменте $[a,b]$, но не сходится ни в одной точке этого сегмента.

5.10. Докажите, что если функциональная последовательность $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на промежутке X, то функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на промежутке X.

5.11. Приведите пример функциональной последовательности, которая ограничена в каждой точке $x\in X$, но не является равномерно ограниченной на множестве X.

5.12. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=\frac{n}{x+n}$ сходится неравномерно на множестве $[0,+\infty)$, но предельная функция непрерывна на этом множестве.

5.13. Приведите пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, которая сходится неравномерно к функции $f(x)$ на промежутке X, и при этом $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x}f_n(t)dt\neq\int\limits_{x_0}^{x}f(t)dt$, где $[x_0,x]\subset X$.

5.14. Приведите пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, такой, что каждая функция $f_n(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a,b]$, но последовательность не является равностепенно непрерывной на этом сегменте.

Тема 4. Несобственные интегралы.

1. **Определения.**
   1.1.Сформулируйте определение несобственного интеграла I рода.
   1.2.Сформулируйте определение несобственного интеграла II рода.
2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**
   2.1.Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла I рода.
   2.2.Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственного интеграла II рода.
   2.3.Сформулируйте признак сравнения для несобственных интегралов I рода.
   2.4.Сформулируйте признак сравнения для несобственных интегралов II рода.
   2.5.Сформулируйте признак Дирихле-Абеля для несобственного интеграла I рода.
3. **Теоремы с доказательством.**
   3.1.Докажите теорему о критерии Коши сходимости несобственного интеграла I рода.
   3.2.Докажите теорему о критерии Коши сходимости несобственного интеграла II рода.
   3.3.Докажите теорему о признаке сравнения для несобственных интегралов I рода.
   3.4.Докажите теорему о признаке сравнения для несобственных интегралов II рода.
   3.5.Докажите теорему о признаке Дирихле-Абеля для несобственного интеграла I рода.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Исследуйте интегралы на сходимость:

4.1.1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

4.1.2. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4+1}dx$;

4.1.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}}dx$;

4.1.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^4\sqrt{x}}dx$;

4.1.5. $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)dx$;

4.1.6. $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)dx$;

4.1.7. $\int_0^{+\infty} x\sin(x^3)dx$.

4.2. Докажите, что интеграл сходятся:

4.2.1. $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$;

4.2.2. $\int_0^{+\infty} x^ne^{-x}dx$, $n \in Z$, $n > -1$.

4.3. Докажите, что интеграл сходится, и вычислите его:

4.3.1. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

4.3.2. $\int_0^{1} x\ln x dx$;

4.3.3. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$;

4.3.4. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$.

4.4. Исследуйте интеграл на сходимость и вычислите в случае сходимости.

4.4.1. $\int_1^{+\infty} \sin(\ln x)dx$;

4.4.2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

4.4.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2}dx$.

4.5. Найдите, при каких значениях параметра p сходится интеграл:

4.5.1. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^p}$;

4.5.2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$;

4.5.3. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$;

4.5.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg(ax)\,dx}{x^p}$, $a > 0$.

4.6. Найдите, при каких значениях параметра p интеграл сходится абсолютно и при каких – условно:

4.6.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$;

4.6.2. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

5.2. Пусть $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится. Следует ли из этого, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$? Ответ обоснуйте.

5.3. Пусть $f(x)$ - монотонная функция при $x \in (a;+\infty)$, $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$.

Тема 5. Интегралы, зависящие от параметра.

1. **Определения.**
   1.1. Сформулируйте определение равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   1.2. Сформулируйте определение равномерной сходимости несобственного интеграла II рода, зависящего от параметра.
   1.3. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   1.4. Сформулируйте отрицание к определению равномерной сходимости несобственного интеграла II рода, зависящего от параметра.
2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**
   2.1. Сформулируйте теорему о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.
   2.2. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
   2.3. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
   2.4. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   2.5. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла II рода, зависящего от параметра.
   2.6. Сформулируйте признак Вейерштрасса (мажорантный) равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   2.7. Сформулируйте признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   2.8. Сформулируйте теорему о непрерывности несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   2.9. Сформулируйте теорему об интегрировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   2.10. Сформулируйте теорему о дифференцировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
3. **Теоремы с доказательством.**
   3.1. Докажите теорему о критерии Коши равномерной сходимости несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   3.2. Докажите теорему о непрерывности по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   3.3. Докажите теорему об интегрировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
   3.4. Докажите теорему о дифференцировании по параметру несобственного интеграла I рода, зависящего от параметра.
4. **Вопросы и задачи.**
   4.1. Запишите формулу для гамма-функции $\Gamma(p)$ в виде несобственного интеграла. Укажите область сходимости.
   4.2. Укажите области равномерной сходимости для гамма-функции $\Gamma(p)$.
   4.3. Докажите, что гамма-функция $\Gamma(p)$ непрерывна при $p > 0$.
   4.4. Докажите, что гамма-функция $\Gamma(p)$ при $p > 0$ имеет производную любого порядка.
   4.5. Докажите, что гамма-функция удовлетворяет тождеству $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ при $p > 0$.

4.6. Напишите формулу для бета-функции $B(p,q)$ в виде несобственного интеграла. Укажите область сходимости.

4.7. Напишите формулу, выражающую бета-функцию через гамма-функцию, и докажите, что $B(p,q)$ непрерывна в области $p>0$, $q>0$.

4.8. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке изменения параметра *p*, используя определение равномерной сходимости несобственного интеграла.

4.8.1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $p\in(1;+\infty)$. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^p}$, $p\in(0;1)$;

4.8.2. $\int\limits_0^{+\infty}pe^{-px}dx$, а) $p\in[a;b]$, $0<a<b$, б) $p\in[0;b]$, $b>0$;

4.8.3. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}\sin x dx$, а) $p\in(0;+\infty)$, б) $p\in[a;+\infty)$, $a>0$;

4.8.4. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}dx$ а) $p\in(0;+\infty)$; б) $p\in[a;+\infty)$, $a>0$.

4.9. Исследуйте интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке изменения параметра *p*, используя признаки равномерной сходимости интеграла.

4.9.1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$,

$p\in[a;+\infty)$, $a>0$;

4.9.2. $\int\limits_0^{1}\frac{x^p}{\sqrt{1-x}}dx$,

$p\in[0;+\infty)$:

4.9.3. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}e^{-px}dx$,

$p\in[0;+\infty)$;

4.10. Докажите, что функция $f(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(px)}{1+x^2}dx$ непрерывна на промежутке $p\in(-\infty;+\infty)$.

4.11. Для каких значений p сходится интеграл $\int_0^1 x^p(\ln x)^2dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^1 x^p dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

4.12. Вычислите:

4.12.1. $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$, дифференцируя по параметру интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-px^2}dx$;

4.12.2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, дважды дифференцируя по параметру интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-px^2}dx$.

4.12.3. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-px}dx$, $p>0$, дифференцируя по параметру.

4.13. Укажите область сходимости интеграла и выразите его через интегралы Эйлера .

4.13.1. $\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-t^2}dt$;

4.13.2. $\int_0^{+\infty}e^{-x^p}dx$;

4.13.3. $\int_0^1 (-\ln t)^p\, dt$;

4.13.4. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^q}\, dx$;

4.13.5. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx \ \ (q>0)$;

4.13.6. $\int_0^1 (1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)} dx,\ p>0$.

5. **Задачи повышенной трудности**.

5.1. С помощью критерия Коши исследуйте интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ на равномерную сходимость на промежутке $p \in (0;+\infty)$.

5.2. Докажите, что функция *f*(*p*) непрерывна на указанном промежутке

5.2.1. $f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-p)^2} dx,\ p \in (0;+\infty)$;

5.2.2. $f(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^p}\, dx,\ p \in (2;+\infty)$.

5.3. Для каких значений q сходится интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin qx dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos qx dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

Тема 6. Кратные несобственные интегралы, зависящие от параметра.

1. **Определения.**

1.1. Сформулируйте определение равномерной сходимости в точке M_o несобственного интеграла вида $\iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P$.

2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**

2.1. Сформулируйте теорему о достаточных условиях равномерной сходимости в точке M_o несобственного интеграла $\iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P$.

3. **Теоремы с доказательством.**

3.1. Докажите теорему о достаточных условиях равномерной сходимости в точке M_o несобственного интеграла $\iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P$.

3.2. Докажите, что если несобственный интеграл $u(M) = \iiint\limits_G f(M,P)g(P)dV_P$ сходится равномерно относительно M в точке M_0, то функция $u(M)$ непрерывна в точке M_0.

4. **Вопросы и задачи.**

4.1. Напишите выражение для ньютонова потенциала.

4.2. Напишите формулы для частных производных первого порядка ньютонова потенциала.

5. **Задачи повышенной трудности**.

5.1. Докажите, что ньютонов потенциал является непрерывной функцией.

Тема 7. Ряды Фурье.

1. **Определения.**

1.1.Сформулируйте определение кусочно-непрерывной функции на отрезке $[a,b]$.

1.2.Сформулируйте определение кусочно-гладкой функции на отрезке $[a,b]$.

1.3. Что такое тригонометрическая система функций на отрезке $[-l,l]$?

1.4. Какой ряд называют рядом Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций на отрезке $[-l,l]$?

1.5. Сформулируйте определение бесконечномерного евклидова пространства.

1.6.Что такое евклидово пространство кусочно-непрерывных функций $Q[a,b]$?

1.7. Сформулируйте определение нормированного пространства.

1.8.Сформулируйте определения ортогональной и ортонормированной систем в бесконечномерном евклидовом пространстве.

1.9. Что такое ряд Фурье элемента f бесконечномерного евклидова пространства по ортогональной системе $\{\psi_n\}$? Напишите выражение для коэффициентов Фурье элемента f.

1.10. Сформулируйте определение сходимости ряда Фурье элемента f к этому элементу по норме данного пространства.

1.11. Сформулируйте определение замкнутой системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

1.12. Сформулируйте определение полной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства)**.

2.1. Запишите ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций на отрезке $[-\pi;\pi]$ и выражения для коэффициентов этого ряда.

2.2. Запишите ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций на отрезке $[-l;l]$ и выражения для коэффициентов этого ряда.

2.3. Запишите тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме на отрезке $[-l;l]$ и выражения для коэффициентов этого ряда.

2.4. Сформулируйте теорему о поточечной сходимости и сумме тригонометрического ряда Фурье

2.5. Запишите ряд Фурье элемента f бесконечномерного евклидова пространства по ортогональной системе элементов этого пространства и выражения для коэффициентов этого ряда.

2.6. Сформулируйте теорему об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье элемента f бесконечномерного евклидова пространства по ортонормированной системе элементов этого пространства.

2.7. Запишите тождество Бесселя для элемента f бесконечномерного евклидова пространства.

2.8. Запишите неравенство Бесселя для элемента f бесконечномерного евклидова пространства.

2.9. Запишите неравенство Бесселя для коэффициентов ряда Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций на отрезке $[-\pi;\pi]$.

2.10. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии замкнутости ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

2.11. Сформулируйте теорему о связи замкнутости и полноты ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

2.12. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

2.13. Сформулируйте теорему об *m* – кратном почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

2.14. Сформулируйте теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте $[-l;l]$ функции тригонометрическим многочленом.

2.15. Сформулируйте теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте $[a;b]$ функции алгебраическим многочленом.

2.16. Сформулируйте теорему о замкнутости тригонометрической системы функций.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте функции непрерывной кусочно-гладкой функцией.

3.2. Докажите, что если $f(x)$ - кусочно-непрерывная на сегменте $[a;b]$ функция, то

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty \text{ и } \int_a^b f(x)\sin\lambda x dx \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty .$$

3.3. Докажите теорему о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

3.4. Докажите теорему об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье элемента f бесконечномерного евклидова пространства по ортонормированной системе элементов этого пространства. Обоснуйте тождество Бесселя и неравенство Бесселя.

3.5. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии замкнутости ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

3.6. Докажите, что если ортонормированная система в бесконечномерном евклидовом пространстве замкнута, то любой элемент пространства можно разложить в ряд Фурье по этой системе, сходящийся к данному элементу по норме пространства. Докажите единственность такого разложения.

3.7. Докажите теорему о связи замкнутости и полноты ортонормированной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

3.8. Докажите теорему о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

3.9. Докажите теорему об *m* – кратном почленном дифференцировании тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

3.10. Докажите теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте $[-\pi;\pi]$ функции тригонометрическим многочленом.

3.11. Докажите теорему об аппроксимации непрерывной на сегменте $[a;b]$ функции алгебраическим многочленом.

3.12. Докажите теорему о замкнутости тригонометрической системы функций в пространстве $Q[-\pi;\pi]$.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Приведите пример бесконечной ортогональной системы функций на отрезке $[-\pi;\pi]$, каждый элемент которой ортогонален всем функциям $\sin nx$, $n \geq 1$. Является ли эта система полной?

4.2. Приведите пример бесконечной системы функций на отрезке $[-\pi;\pi]$, которая не является замкнутой в пространстве $Q[-\pi;\pi]$, но если к ней добавить еще одну функцию, то она станет замкнутой.

4.3. Приведите пример бесконечной системы функций на отрезке $[-\pi;\pi]$, которая не является замкнутой в пространстве $Q[-\pi;\pi]$, но является замкнутой в подпространстве пространства $Q[-\pi;\pi]$, состоящем из всех четных кусочно-непрерывных функций.

4.4. Приведите пример бесконечной ортогональной системы функций на отрезке $[-\pi;\pi]$, которая не является полной в пространстве $Q[-\pi;\pi]$.

4.5. Приведите пример бесконечной ортогональной системы функций на отрезке $[-\pi;\pi]$, которая не является замкнутой в пространстве $Q[-\pi;\pi]$.

4.6. Верно ли, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции $f(x)$, её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится в среднем на указанном отрезке? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.

4.7. Верно ли, что для любой 2π – периодической непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции $f(x)$ её ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к $f(x)$ равномерно на всей числовой оси? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.

4.8. Верно ли, что для любой 2π – периодической дважды непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции $f(x)$ её ряд Фурье по тригонометрической системе можно дифференцировать почленно и ряд из производных сходится к $f'(x)$ равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.

4.9. Верно ли, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции $f(x)$ её ряд Фурье по тригонометрической системе можно интегрировать почленно и ряд из интегралов сходится к интегралу от функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте ссылкой на теорему.

4.10. Сформулируйте достаточные условия того, что ряд Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;\pi]$, по системе функций $\{\sin nx\,,\ n\geq 1\}$, сходится в каждой точке числовой оси. Чему равна при этом сумма указанного ряда Фурье?

4.11. Сформулируйте достаточные условия того, что ряд Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;\pi]$, по системе функций $\{\cos nx\,,\ n\geq 0\}$, сходится в каждой точке числовой оси. Чему равна при этом сумма указанного ряда Фурье?

4.12. Пусть $f(x)$ – непрерывная кусочно-гладкая функция на отрезке $[-\pi;\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, a_n, b_n – коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе. При каких p справедливы равенства $a_n=o\left(n^{-p}\right)$, $b_n=o\left(n^{-p}\right)$?

4.13. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, $x\in(-\pi;\pi]$ по тригонометрической системе функций и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

4.14. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=1$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\sin nx,\ n\geq 1\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

4.15. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=1$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\cos nx,\ n\geq 0\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

4.16. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\sin nx,\ n\geq 1\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

4.17. Найдите разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, $x\in(0;\pi)$, по системе функций $\left\{\cos nx,\ n\geq 0\right\}$ и нарисуйте график его суммы на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

4.18. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции
$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$. Найдите $S(\pi)$.

4.19. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)=x$, $0\le x<2\pi$, продолженной на всю числовую ось с периодом 2π. Найдите $S(0)$.

4.20. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции
$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$, продолженной на всю числовую ось с периодом 2π. Найдите $S(0)$.

4.21. Пусть $S(x)$ – сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)=x^2$, $0\le x<2\pi$, продолженной на всю числовую ось с периодом 2π. Найдите $S(0)$.

4.22. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция, $\{\varphi_k(x)\}$ – ортогональная система функций в пространстве $Q[a;b]$, f_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$. Чему равно наименьшее значение функции $F(C_1,C_2,...,C_n)=\int\limits_a^b\left(f(x)-\sum\limits_{k=1}^n C_k\varphi_k(x)\right)^2dx$?

4.23. Пусть $f(x)$ – интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция, $\{\varphi_k(x)\}$ – ортогональная система функций на отрезке $[a;b]$, C_k – произвольные числа. При каких значениях C_k функция $F(C_1,C_2,...,C_n)=\int\limits_a^b\left(f(x)-\sum\limits_{k=1}^n C_k\varphi_k(x)\right)^2dx$ принимает наименьшее значение?

4.24. Пусть $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, причем ряд сходится равномерно на всей числовой оси, C_k – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение функции $F(C_1,C_2,...,C_n)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum\limits_{k=1}^n C_k\sin kx\right)^2dx$? Выразите ответ только через числовые величины a_k, b_k.

4.25. Пусть $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, причем ряд сходится равномерно на всей числовой оси, C_k – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение функции $F(C_0,C_1,C_2,...,C_n)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\dfrac{C_0}{2}-\sum\limits_{k=1}^n C_k\cos kx\right)^2dx$? Выразите ответ только через известные величины a_k, b_k.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1.Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nx$, $x\in(-\infty;+\infty)$, и $f(x)=x$, $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Нарисуйте график функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте.

5.2.Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n+1)x$, $x \in (-\infty;+\infty)$, и $f(x)=x$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Нарисуйте график функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте.

5.3.Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos 2nx$, $x \in (-\infty;+\infty)$, и $f(x)=x$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Нарисуйте график функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте.

5.4.Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2n+1)x$, $x \in (-\infty;+\infty)$, и $f(x)=x$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Нарисуйте график функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте.

5.5.Пусть $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$, $x \in (-\infty;+\infty)$, и $f(x)=1$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Нарисуйте график функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте.

5.6.Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2n+1)x$, $x \in (-\infty;+\infty)$, и $f(x)=1$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Нарисуйте график функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. Является ли указанный ряд Фурье равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi;\pi]$? Ответ обоснуйте.

5.7.Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная четная функция на промежутке $[-\pi;\pi]$, C_k – произвольные числа. Чему равно значение $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n$, если $Z_n=\min F(C_1,C_2,...,C_n)$, где $F(C_1,C_2,...,C_n)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n} C_k \cos kx\right)^2 dx$?

5.8.Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная нечетная функция на отрезке $[-\pi;\pi]$, C_k – произвольные числа. Чему равно значение $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n$, если $Z_n=\min F(C_1,C_2,...,C_n)$, где $F(C_1,C_2,...,C_n)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n} C_k \sin kx\right)^2 dx$?

5.9.Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-\pi;\pi]$ нечетная функция, a_k и b_k – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, C_k – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение функции $F(C_1,C_2,...,C_n)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n} C_k \sin kx\right)^2 dx$?

5.10. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-\pi;\pi]$ нечетная функция, a_k и b_k – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, C_k – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение функции $F(C_0,C_1,C_2,...,C_n)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{C_0}{2}-\sum_{k=1}^{n} C_k \cos kx\right)^2 dx$?

5.11. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-\pi;\pi]$ четная функция, a_k и b_k – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, C_k – произвольные числа. Чему равно наименьшее значение функции $F(C_1, C_2, ..., C_n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \sin kx \right)^2 dx$?

5.12. Докажите, что если производная $f'(x)$ существует в правой полуокрестности точки x_0, и существует $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0 + 0)$, то существует $\lim\limits_{\xi \to +0} \dfrac{f(x_0 + \xi) - f(x_0 + 0)}{\xi} = f'(x_0 + 0)$.

5.13. Докажите, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ коэффициенты тригонометрического ряда Фурье a_n и b_n удовлетворяют условиям:

- $a_n \to 0, b_n \to 0$ при $n \to \infty$;
- ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left({a_n}^2 + {b_n}^2 \right)$ сходится.

5.14. Докажите, что для любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ ее тригонометрического ряд Фурье можно интегрировать почленно.

5.15. Сколько раз можно почленно дифференцировать на отрезке $[-\pi, \pi]$ тригонометрический ряд Фурье функции

- $f(x) = \left(x^2 - \pi^2 \right)^2$
- $f(x) = \sin(\cos x)$
- $f(x) = e^{\sin x}$
- $f(x) = e^{\cos x}$

Тема 8. Интеграл Фурье.

1. **Определения.**
2. **Основные теоремы и формулы (без доказательства).**

2.1. Запишите представление функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье. При каких условиях оно имеет место?

2.2. Запишите интеграл Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме.

2.3. Запишите формулу преобразования Фурье функции $f(x)$.

2.4. Запишите формулу синус - преобразования Фурье функции $f(x)$.

2.5. Запишите формулу косинус - преобразования Фурье функции $f(x)$.

2.6. Запишите формулу обратного преобразования Фурье функции $f(x)$.

2.7. Запишите формулу обратного синус - преобразования Фурье функции $f(x)$.

2.8. Запишите формулу обратного косинус - преобразования Фурье функции $f(x)$.

3. **Теоремы с доказательством.**

3.1. Докажите теорему о представлении функции в виде интеграла Фурье.

4. **Вопросы и задачи.**

4.1. Представьте в виде интеграла Фурье следующие функции:

4.1.1. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| \ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

4.1.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

4.2. Найдите образ Фурье следующих функций:

4.2.1. $f(x) = e^{-p|x|}$, $p > 0$;

4.2.2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

4.2.3. $f(x)=e^{-p|x|}\sin\beta x$, $p>0$;

4.2.4. $f(x)=1, x\in[-p;p]$ $f(x)=0$, $x\notin[-p;p]$.

4.3. Найдите косинус - образ Фурье четной функции $f(x)$.

4.3.1. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<p,\\ 0, & |x|\geq p.\end{cases}$, $p>0$. Чему равно значение интеграла Фурье в точках $x=0, x=\dfrac{p}{2}, x=-p$?

4.3.2. $f(x)=e^{-p|x|}$, $p>0$;

4.3.3. $f(x)=x^2e^{-p|x|}$, $p>0$;

4.3.4. $f(x)=e^{-p|x|}\cos qx$, $p>0$, $q>0$;

4.3.5. $f(x)=\dfrac{1}{p^2+x^2}$, $p>0$;

4.3.6. $f(x)=\dfrac{\cos qx}{p^2+x^2}$, $p>0$, $q>0$;

4.3.7. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$.

4.4. Найдите синус - образ Фурье нечетной функции $f(x)$.

4.4.1. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<p,\\ 0, & x\geq p,\end{cases}$, $f(-x)=-f(x)$, $p>0$. Чему равно значение интеграла Фурье в точках $x=0, x=\dfrac{p}{2}, x=-p$?

4.4.2. $f(x)=\operatorname{sign}x\cdot e^{-p|x|}$, $p>0$;

4.4.3. $f(x)=xe^{-p|x|}$, $p>0$;

4.4.4. $f(x)=e^{-p|x|}\sin qx$, $p>0$, $q>0$;

4.4.5. $f(x)=\dfrac{x}{p^2+x^2}$, $p>0$;

4.4.6. $f(x)=\dfrac{x\sin qx}{p^2+x^2}$, $p>0$, $q>0$;

4.4.7. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$. При решении этой задачи можно использовать дифференцирование по параметру образа Фурье четной функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

4.5. Приведите пример отличной от нуля функции, которая совпадает со своим образом Фурье.

4.6. Восстановите функцию $f(x)$ по её образу Фурье $\hat{f}(\lambda)$.

4.6.1. $\hat{f}_c(\lambda)=\dfrac{p}{\lambda^2+p^2}$, $p>0$;

4.6.2. $\hat{f}_s(\lambda)=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+p^2}$, $p>0$;

4.6.3. $\hat{f}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$.

Тема 9. Обобщенные функции.

1. Определения.

1.1. Какие функции входят в множество основных функций? Что такое носитель основной функции?

1.2. Сформулируйте определение сходящейся последовательности основных функций.
1.3. Сформулируйте определение пространства D основных функций.
1.4. . Сформулируйте определение функционала и линейного функционала на пространстве D основных функций.
1.5. Сформулируйте определение непрерывного функционала на пространстве D.
1.6. Сформулируйте определение обобщенной функции.
1.7. Сформулируйте определение суммы двух обобщенных функций и произведения обобщенной функции на число.
1.8. Сформулируйте определение сходящейся последовательности обобщенных функций.
1.9. Что такое пространство D' обобщенных функций?
1.10. Какие обобщенные функции называются регулярными и какие сингулярными?
1.11. Что такое δ-функция?
1.12. Сформулируйте определение произведения обобщенной функции и бесконечно дифференцируемой функции.
1.13. Как определяется линейная замена переменных в обобщенных функциях?
1.14. Сформулируйте определение производной обобщенной функции.
1.15. Сформулируйте определение производной k-го порядка обобщенной функции.
1.16. Что такое носитель обобщенной функции?

2-3. Основные теоремы и формулы.

2-3.1. Докажите, что δ-функция является непрерывным линейным функционалом.

2-3.2. Докажите, что δ-функция является сингулярной обобщенной функцией.

2-3.3. Докажите, что δ-функцию можно представить как предел последовательности регулярных обобщенных функций.

2-3.4. Напишите формулу, определяющую произведение обобщенной функции и бесконечно дифференцируемой функции. Обоснуйте эту формулу для регулярных обобщенных функций.

2-3.5. Напишите формулу, определяющую линейную замену переменных в обобщенных функциях. Обоснуйте эту формулу для регулярных обобщенных функций.

2-3.6. Напишите формулу, определяющую производную обобщенной функции. Обоснуйте эту формулу для регулярных обобщенных функций.

2-3.7. Докажите, что любая обобщенная функция имеет производные всех порядков.

4-5. Вопросы и задачи.

4-5.1. Приведите пример функции из пространства D.

4-5.2. Приведите пример сходящейся последовательности функций в пространстве D.

4-5.3. Приведите примеры линейного и нелинейного функционалов.

4-5.4. Пусть $\hat{f}_\varepsilon, \hat{g}_\varepsilon$ и $\hat{h}_\varepsilon$ - регулярные обобщенные функции., порожденные локально интегрируемыми функциями

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}},\ g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon},\ h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Докажите , что

- $\hat{f}_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$ в D';
- $\hat{g}_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$ в D';
- $\hat{h}_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$ в D',

где $\delta(x)$ есть δ-функция.

4-5.5. Найдите носитель δ-функции.

4-5.6. Приведите пример обобщенной функции, носителем которой является вся числовая прямая.

4-5.7. Докажите, что

- $\delta(-x) = \delta(x)$;
- $\left(\delta(x - x_0), \varphi(x)\right) = \varphi(x_0)$.

4-5.8. Пусть $\hat{\theta}(x)$ есть обобщенная функция, порожденная функцией Хевисайда $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Докажите, что производная $D\hat{\theta}$ обобщенной функции $\hat{\theta}$ выражается формулой $D\hat{\theta} = \delta(x)$, где $\delta(x)$ есть δ-функция.

4-5.9. Выведите формулу для производной δ-функции.

4-5.10. Выведите формулу для производной k-го порядка δ-функции.

4-5.11. Пусть $\widehat{\operatorname{sgn} x}$ -регулярная обобщенная функция, порожденная функцией $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$. Докажите, что $D\left(\widehat{\operatorname{sgn} x}\right) = 2\delta(x)$.

4-5.12. Пусть $\widehat{\sin x}$ и $\widehat{\cos x}$ - регулярные обобщенные функции, порожденные функциями $\sin x$ и $\cos x$. Докажите, что $D\left(\widehat{\sin x}\right) = \widehat{\cos x}$, $D\left(\widehat{\cos x}\right) = -\widehat{\sin x}$.

4-5.13. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв первого рода, а в остальных точках числовой прямой $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны; пусть $\hat{f}$ и $\widehat{f'}$ - регулярные обобщенные функции, порожденные функциями $f(x)$ и $f'(x)$. Докажите, что для производной $D\hat{f}$ обобщенной функции $\hat{f}$ справедливо равенство $D\hat{f} = \widehat{f'} + \left[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)\right]\delta\left(x - x_0\right)$.