

# ТЕМА 1

## *Метрические, нормированные и евклидовы пространства.*

### Основные определения и теоремы

Множество  $L$  называется (вещественным) линейным пространством, если для любых двух его элементов  $x, y$  определен элемент  $x + y \in L$  (называемый суммой  $x$  и  $y$ ), и для любого элемента  $x \in L$  и любого (вещественного) числа  $\alpha$  определен элемент  $\alpha x \in L$ , причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов  $x, y \in L$   $x + y = y + x$  (коммутативность сложения);
- 2) для любых элементов  $x, y, z \in L$   $(x + y) + z = x + (y + z)$  (ассоциативность сложения);
- 3) существует элемент  $\theta \in L$  (называемый нулевым элементом, или нулем пространства  $L$ ) такой, что для любого элемента  $x \in L$   $x + \theta = x$  (существование нулевого элемента);
- 4) для любого элемента  $x \in L$  существует элемент  $(-x) \in L$  (называемый обратным к  $x$ ) такой, что  $x + (-x) = \theta$  (существование обратного элемента);
- 5) для любых элементов  $x, y \in L$  и любого (вещественного) числа  $\alpha$   $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);
- 6) для любых (вещественных) чисел  $\alpha$  и  $\beta$  и любого элемента  $x \in L$   $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);
- 7) для любых (вещественных) чисел  $\alpha, \beta$  и любого элемента  $x \in L$   $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  (ассоциативность умножения на число);
- 8) для любого элемента  $x \in L$   $1 \cdot x = x$  (свойство единицы).

Элементы  $x_1, x_2, \dots, x_m$  линейного пространства  $L$  называются линейно зависимыми, если существуют такие (вещественные) числа  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , не все равные нулю, что

$\sum_{k=1}^m C_k x_k = \theta$ ; если же последнее равенство имеет место в единственном случае  $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$ , то элементы  $x_1, x_2, \dots, x_m$  - линейно независимы.

Натуральное число  $n$ , называется размерностью линейного пространства, если существуют  $n$  линейно независимых элементов пространства, а любые  $n+1$  элементов - линейно зависимы. В этом случае линейное пространство называется конечномерным ( $n$ -мерным).

Если для любого натурального  $n$  можно указать  $n$  линейно независимых элементов, то линейное пространство называется бесконечномерным.

Множество  $M$  называется метрическим пространством, если для любых двух его элементов  $x, y \in M$  определено вещественное число  $\rho(x, y)$  (называемое метрикой, или расстоянием), причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов  $x, y \in M$   $\rho(x, y) \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда элементы  $x$  и  $y$  совпадают (неотрицательность метрики);
- 2) для любых элементов  $x, y \in M$   $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (симметричность метрики);
- 3) для любых элементов  $x, y, z \in M$   $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$  (неравенство треугольника).

Метрическое пространство не обязательно является линейным.

Последовательность элементов метрического пространства  $x_n \in M$ ,  $n = 1, 2, \dots$  сходится к элементу  $x_0 \in M$  ( $x_n \rightarrow x_0$  при  $n \rightarrow \infty$ ), если  $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Линейное пространство  $N$  называется нормированным, если для любого элемента  $x \in N$  определено (вещественное) число  $\|x\|$  (называемое нормой), причем выполнены следующие условия:

- 1) для любого элемента  $x \in N$   $\|x\| \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = \theta$  - нулевой элемент пространства;
- 2) для любого элемента  $x \in N$  и любого (вещественного) числа  $\alpha$   $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$  (неотрицательная однородность нормы);
- 3) для любых элементов  $x, y \in N$   $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Нормированное пространство является метрическим, если положить  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

Последовательность элементов нормированного пространства  $x_n \in N$ ,  $n = 1, 2, \dots$  сходится (по норме пространства  $N$ ) к элементу  $x_0 \in N$  ( $x_n \rightarrow x_0$  при  $n \rightarrow \infty$ ), если  $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Из сходимости последовательности  $x_n$  по норме пространства следует сходимость последовательности (числовой!) норм, т.е. если  $x_n \rightarrow x_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$  при  $n \rightarrow \infty$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

Последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  элементов нормированного пространства  $N$  называется фундаментальной, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $K$  такой, что для любого  $n \geq K$  и любого натурального  $p$  выполнено неравенство  $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$ .

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Если же любая фундаментальная последовательность элементов сходится, то нормированное пространство называется полным.

Полное нормированное пространство называется банаховым.

Последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  элементов нормированного пространства  $N$  называется ограниченной, если существует константа  $C$  такая, что  $\|x_n\| \leq C$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ .

Последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  элементов нормированного пространства  $N$ , обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется компактной.

Любая компактная последовательность является ограниченной. В конечномерном пространстве верно и обратное утверждение, однако, для бесконечномерных пространств это, вообще говоря, не так.

Линейное пространство  $E$  называется евклидовым, для любых двух элементов  $x, y \in E$  определено вещественное число  $(x, y)$ , называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов  $x, y \in E$   $(x, y) = (y, x)$  (симметричность);
- 2) для любых элементов  $x, y, z \in E$   $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$  (аддитивность по первому аргументу);
- 3) для любых элементов  $x, y \in E$  и любого вещественного числа  $\alpha$   $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$  (однородность по первому аргументу);
- 4) для любого  $x \in E$   $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = \theta$  (свойство скалярного квадрата).

В евклидовом пространстве  $E$  всегда можно ввести норму, порожденную скалярным произведением  $\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$ .

Для любых двух элементов  $x$  и  $y$  произвольного евклидова пространства выполняется неравенство Коши-Буняковского  $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$  или

$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда элементы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

Напомним определения основных встречающихся далее линейных пространств.

1. Нормированное пространство  $C[a, b]$ . Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции. Норма определяется как  $\|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$ , сходимость по норме пространства  $C[a, b]$  - равномерная сходимость. Пространство  $C[a, b]$  - банахово (полное).
2. Нормированное пространство  $C^{(p)}[a, b]$ . Элементами этого пространства являются функции, непрерывные с производными до  $p$ -го порядка включительно на отрезке  $[a, b]$ . Норма определяется как  $\|y\|_{C^{(p)}[a, b]} = \sum_{k=0}^p \max_{x \in [a, b]} |y^{(k)}(x)|$ , сходимость по норме пространства  $C^{(p)}[a, b]$  - равномерная со всеми производными до  $p$ -го порядка. Пространство  $C^{(p)}[a, b]$  - банахово.
3. Евклидово (нормированное) пространство  $h[a, b]$ . Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции. Для любых двух непрерывных функций положим  $(y, z) = \int_a^b y(x)z(x)dx$  - скалярное произведение, и введем норму, порожденную скалярным произведением  $\|y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx}$ ; сходимость по норме пространства  $h[a, b]$  - сходимость в среднем. Пространство  $h[a, b]$  не является полным.

### Примеры решения задач

*Пример 1.1.* Доказать, что множество (вещественных) функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$  образует (вещественное) линейное пространство (пространство  $C[a, b]$ ).

*Решение.* Так как сумма двух непрерывных функций, а также произведение непрерывной функции на вещественное число, также являются непрерывными функциями, то для решения задачи необходимо проверить аксиомы линейного пространства.

- 1)  $\forall y(x), z(x) \in C[a, b]$   $y(x) + z(x) = z(x) + y(x)$ ;
- 2)  $\forall y(x), z(x), w(x) \in C[a, b]$   $[y(x) + z(x)] + w(x) = y(x) + [z(x) + w(x)]$ ;
- 3) нулевым элементом пространства естественно считать  $y(x) \equiv 0 \in C[a, b]$ ;
- 4)  $\forall y(x) \in C[a, b]$  существует противоположный элемент  $-y(x) \in C[a, b]$ ;
- 5)  $\forall y(x), z(x) \in C[a, b], \forall \alpha$   $\alpha [y(x) + z(x)] = \alpha y(x) + \alpha z(x)$ ;
- 6)  $\forall y(x) \in C[a, b], \forall \alpha, \beta$   $(\alpha + \beta)y(x) = \alpha y(x) + \beta y(x)$ ;
- 7)  $\forall y(x) \in C[a, b], \forall \alpha, \beta$   $(\alpha\beta)y(x) = \alpha [\beta y(x)]$ ;
- 8)  $\forall y(x) \in C[a, b]$   $1 \cdot y(x) = y(x)$ .

*Пример 1.2.* Доказать, что пространство  $C[a, b]$  является нормированным, если для  $\forall y(x) \in C[a, b]$  определить  $\|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$ .

*Решение.* Для доказательства достаточно убедиться в корректности указанного определения нормы, т.е. проверить аксиомы нормы.

- 1)  $\forall y(x) \in C[a, b]: \|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| \geq 0$ , причем  $\|y\|_{C[a, b]} = 0 \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 = \theta$ ;
- 2)  $\forall y(x) \in C[a, b], \forall \alpha: \|\alpha y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |\alpha y(x)| = |\alpha| \cdot \max_{x \in [a, b]} |y(x)| = |\alpha| \cdot \|y\|_{C[a, b]}$ ;
- 3)  $\forall y(x), z(x) \in C[a, b]: \|y + z\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x) + z(x)| \leq$   
 $\leq \max_{x \in [a, b]} (|y(x)| + |z(x)|) \leq \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \max_{x \in [a, b]} |z(x)| = \|y\|_{C[a, b]} + \|z\|_{C[a, b]}.$

*Пример 1.3.* Доказать неравенство Коши-Буняковского в пространстве  $h[a, b]$  и проверить корректность определения нормы в этом пространстве  $\|y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(s) ds}$ .

*Решение.* Неравенство Коши-Буняковского в пространстве  $h[a, b]$  имеет вид

$$(y, z)^2 \equiv \left[ \int_a^b y(x)z(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b y^2(x)dx \cdot \int_a^b z^2(x)dx \quad \forall y(x), z(x) \in h[a, b].$$

Для доказательства рассмотрим следующее очевидное соотношение  $0 \leq (y + \lambda z, y + \lambda z) = (y, y) + 2\lambda(y, z) + \lambda^2(z, z)$ , которое справедливо для любых двух элементов пространства  $y(x), z(x) \in h[a, b]$  и любого вещественного числа  $\lambda$ . Поэтому дискриминант квадратного (относительно  $\lambda$ ) трехчлена должен быть отрицательным, т.е.  $4(y, z)^2 - 4(y, y)(z, z) \leq 0$ , откуда и получаем требуемое неравенство:

$$(y, z)^2 \equiv \left[ \int_a^b y(x)z(x)dx \right]^2 \leq (y, y)(z, z) \equiv \int_a^b y^2(x)dx \cdot \int_a^b z^2(x)dx.$$

*Замечание.* Приведенное доказательство может быть проведено в любом евклидовом пространстве.

Для проверки корректности определения нормы в пространстве  $h[a, b]$  нужно убедиться в справедливости соответствующих аксиом в определении нормы.

- 1)  $\forall y(x) \in h[a, b]: \|y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx} \geq 0$ , причем  $\|y\|_{h[a, b]} = 0 \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 = \theta$ ;
- 2)  $\forall y(x) \in h[a, b], \forall \alpha: \|\alpha y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b \alpha^2 y^2(x)dx} = |\alpha| \cdot \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx} = |\alpha| \cdot \|y\|_{h[a, b]}$ ;
- 3)  $\forall y(x), z(x) \in h[a, b]: \|y + z\|_{h[a, b]}^2 = \int_a^b (y(x) + z(x))^2 dx = \int_a^b (y^2(x) + z^2(x) + 2y(x)z(x))dx \leq$   
(с учетом неравенства Коши-Буняковского)  
 $\leq \int_a^b y^2(x)dx + \int_a^b z^2(x)dx + 2\sqrt{\int_a^b y^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b z^2(x)dx} = (\|y\|_{h[a, b]} + \|z\|_{h[a, b]})^2,$

откуда получаем неравенство треугольника  $\|y + z\|_{h[a, b]} \leq \|y\|_{h[a, b]} + \|z\|_{h[a, b]}.$

**Пример 1.4.** Найти норму  $y(x) = \sin x + \cos x$

а) в пространстве  $C[0, 2\pi]$ ;

б) в пространстве  $h[0, 2\pi]$ .

**Решение.** а)  $\|\sin x + \cos x\|_{C[0, 2\pi]} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}$ ;

б)  $\|\sin x + \cos x\|_{h[0, 2\pi]} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx} = \sqrt{2\pi}$ .

**Пример 1.5.** Доказать, что любая сходящаяся последовательность элементов нормированного пространства фундаментальна.

**Решение.** Последовательность  $x_n$  элементов нормированного пространства  $N$  называется фундаментальной, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $K$  такой, что для любого  $n \geq K$  и любого натурального  $p$  выполнено  $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$ .

Пусть последовательность  $x_n$  элементов нормированного пространства сходится (по норме пространства  $N$ ) к элементу  $x_0 \in N$ , тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $K$  такой, что при  $n \geq K$  и любом натуральном  $p$  одновременно выполнены два неравенства:

$$\|x_n - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \|x_{n+p} - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пользуясь неравенством треугольника, получим при  $n \geq K$  и любом натуральном  $p$   $\|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - x_0 + x_0 - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_0\| + \|x_n - x_0\| \leq \varepsilon$ , что и требовалось.

**Пример 1.6.** Доказать, что пространство  $h[a, b]$  не является полным.

**Решение.** Для доказательства достаточно построить пример фундаментальной последовательности элементов пространства  $h[a, b]$ , которая не является сходящейся в этом пространстве.

Рассмотрим для определенности пространство  $h[-1, 1]$  и последовательность непрерывных функций (элементов этого пространства):

$$y_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx, & 0 \leq |x| \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

а) Докажем, что эта последовательность фундаментальна в пространстве  $h[-1, 1]$ .

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $m > n$ , тогда существует такое натуральное число  $N(\varepsilon)$ , для которого

$$\|y_n(x) - y_m(x)\|_{h[-1, 1]}^2 = \int_{-1}^1 (y_n(x) - y_m(x))^2 dx = 2 \int_0^{\frac{1}{m}} (mx - nx)^2 dx + 2 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^2 dx = \frac{2}{3n} + \frac{2n}{3m^2} - \frac{4}{3m} \leq \frac{4}{3n} < \varepsilon$$

при  $\forall m > n > N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{4}{3\varepsilon} \right\rceil + 1$ , что и требовалось доказать.

б) Пусть последовательность  $y_n(x)$  сходится в пространстве  $h[-1,1]$ , т.е. существует непрерывная функция  $\varphi(x)$  такая, что для  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon)$  и при всех  $n \geq N_1(\varepsilon)$  выполнено

$$\|y_n(x) - \varphi(x)\|_{h[-1,1]} = \sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \varphi(x))^2 dx} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим разрывную функцию 
$$\psi(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Тогда для  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon)$  такое, что при  $\forall n \geq N_2(\varepsilon)$  имеем

$$\sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \psi(x))^2 dx} = \sqrt{2 \int_0^{1/n} (nx - 1)^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3n}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как  $\varphi(x)$  - непрерывная, а  $\psi(x)$  - разрывная функция, то  $\varphi(x) - \psi(x) \neq 0$  и, следовательно,  $\sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx} > 0$ . Поэтому для всех  $\varepsilon > 0$  и  $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 [(\varphi(x) - y_n(x)) + (y_n(x) - \psi(x))]^2 dx} \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi(x) - y_n(x))^2 dx} + \sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \psi(x))^2 dx} = \|y_n(x) - \varphi(x)\|_{h[-1,1]} + \sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \psi(x))^2 dx} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности выбора  $\varepsilon > 0$  получаем противоречие, а значит предположение о сходимости последовательности  $y_n(x)$  в пространстве  $h[-1,1]$  неверно.

Итак, построенная последовательность  $y_n(x)$  фундаментальна в пространстве  $h[-1,1]$ , но не является сходящейся в этом пространстве, что и требовалось доказать.

*Замечание.* При доказательстве было использовано соотношение

$$\int_a^b (y(x) + z(x))^2 dx \leq \int_a^b y^2(x) dx + \int_a^b z^2(x) dx + 2 \sqrt{\int_a^b y^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b z^2(x) dx} = \left[ \sqrt{\int_a^b y^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b z^2(x) dx} \right]^2,$$

являющееся следствием неравенства Коши-Буняковского.

*Пример 1.7.* Доказать, что не всякая ограниченная последовательность в пространстве  $C[a,b]$  является компактной.

*Решение.* Рассмотрим пространство  $C[0,1]$  и последовательность элементов этого пространства  $y_n = \sin 2^n \pi x$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Очевидно,  $\|y_n\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |y_n(x)| = 1$ , т.е. последовательность ограничена.

Покажем, что никакая ее подпоследовательность не может сходиться в  $C[0,1]$ .

Действительно, для любого номера  $i$  существует точка  $x^* = \frac{1}{2^{i+1}} \in [0,1]$  такая, что в ней  $y_i(x^*) = \sin 2^i \pi \frac{1}{2^{i+1}} = 1$ . При этом для любого  $k > i$  в этой же точке имеет место

$y_k(x^*) = \sin 2^k \pi \frac{1}{2^{i+1}} = 0$ . Следовательно,  $\|y_i - y_k\|_{C[0,1]} \geq |y_i(x^*) - y_k(x^*)| = 1$ , т.е. никакая подпоследовательность рассматриваемой последовательности не является фундаментальной, а значит и не может сходиться.

## Задачи для самостоятельного решения

- 1.1 Доказать, что пространство  $h[a, b]$  является линейным.
- 1.2 Доказать, что пространство  $C^{(p)}[a, b]$  является линейным.
- 1.3 Доказать, что в пространстве  $\mathbb{R}^1$  нельзя ввести норму по формуле  $\|x\| = |\arctg x|$ .
- 1.4 Можно ли определить нормы следующими функциями для указанных множеств:
- а)  $\|y\| = \max_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} |y(x)|$  в  $C[a, b]$ ;
- б)  $\|y\| = |y(a)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|$  в  $C^{(1)}[a, b]$ ;
- в)  $\|y\| = |y(b) - y(a)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|$  в  $C^{(1)}[a, b]$ .
- 1.5 Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространств  $C[0, 2]$  и  $C^{(1)}[0, 2]$ :
- а)  $y = 2 \sin \pi x - \cos \pi x$
- б)  $y = 3 \cos \pi x - \sin \pi x$
- в)  $y = x^2 - x$
- г)  $y = x^2 - 4x$
- д)  $y = x^2 - 6x$ .
- 1.6 Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространства  $h[0, 2]$ :
- а)  $y = 2 \sin \pi x - \cos \pi x$
- б)  $y = x^2 - x$
- в)  $y = x^3 - 1$ .
- 1.7 Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность ограничена.
- 1.8 Построить пример, показывающий, что из сходимости в среднем на отрезке  $[a, b]$  функциональной последовательности не следует равномерная (и даже поточечная) сходимость.
- 1.9 Построить пример бесконечной ортонормированной системы в пространстве  $h[a, b]$ .
- 1.10 Привести пример ограниченной некомпактной последовательности в пространстве  $h[a, b]$ .
- 1.11 Доказать, что последовательность  $y_n(x) = x^n$  ограничена и некомпактна в пространстве  $C[0, 1]$ .
- 1.12 Доказать, что последовательность непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций  $y_n(x)$ , удовлетворяющих неравенству  $\|y_n\|_{h[a, b]}^2 + \|y_n'\|_{h[a, b]}^2 \leq \gamma$ ,  $\gamma > 0$ , является компактной в пространстве  $C[a, b]$ .

## Ответы к задачам

- 1.4 а) нет; б) да; в) нет.
- 1.5 а)  $\|y\|_{C[0, 2]} = \sqrt{5}$ ,  $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = (\pi + 1)\sqrt{5}$ ;
- б)  $\|y\|_{C[0, 2]} = \sqrt{10}$ ,  $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = (\pi + 1)\sqrt{10}$ ;
- в)  $\|y\|_{C[0, 2]} = 2$ ,  $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = 5$ ;
- г)  $\|y\|_{C[0, 2]} = 4$ ,  $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = 8$ ;
- д)  $\|y\|_{C[0, 2]} = 9$ ,  $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = 15$ .
- 1.6 а)  $\|y\|_{h[0, 2]} = \sqrt{5}$ ; б)  $\|y\|_{h[0, 2]} = \frac{4}{\sqrt{15}}$ ; в)  $\|y\|_{h[0, 2]} = \sqrt{\frac{86}{7}}$ .

## ТЕМА 2

### *Элементы теории линейных операторов. Обратный оператор. Вполне непрерывный оператор.*

#### Основные определения и теоремы

Оператор  $A$ , действующий из линейного пространства  $L_1$  в линейное пространство  $L_2$ , называется линейным, если для любых элементов  $y_1$  и  $y_2$  из  $L_1$  и любых вещественных чисел  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выполнено равенство  $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2$ .

Пусть  $D(A)$  - область определения, а  $R(A)$  - множество значений оператора  $A$ . Если оператор  $A: y = Ax$ , действующий из линейного пространства  $L_1$  в линейное пространство  $L_2$ , взаимно однозначный, то можно ввести обратный оператор  $A^{-1}: A^{-1}y = x$  с областью определения  $D(A^{-1}) = R(A)$  и множеством значений  $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$ .

Нуль-пространством оператора  $A$  называется множество  $\text{Ker } A = \{x \in L_1 : Ax = \theta\}$ . Очевидно, что  $\text{Ker } A$  – линейное подпространство  $L_1$ , причем  $\theta \in \text{Ker } A$ . Если  $\text{Ker } A \neq \{\theta\}$  (нуль-пространство нетривиально), то оператор  $A$  называется вырожденным.

**Определение А.** Оператор  $A$ , действующий из нормированного пространства  $N_1$  в нормированное пространство  $N_2$ , называется непрерывным в точке  $y_0 \in D(A) \subset N_1$ , если для любой последовательности  $y_n \in D(A)$ , такой что  $y_n \rightarrow y_0$ , последовательность  $A y_n$  сходится к  $A y_0$ .

**Определение Б.** Оператор  $A$ , действующий из нормированного пространства  $N_1$  в нормированное пространство  $N_2$ , называется непрерывным в точке  $y_0 \in D(A) \subset N_1$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $y \in D(A)$  и удовлетворяющих неравенству  $\|y - y_0\| \leq \delta$  выполняется неравенство  $\|Ay - Ay_0\| \leq \varepsilon$ .

Сформулированные определения А и Б эквивалентны.

Оператор  $A$  называется непрерывным на множестве  $D(A)$  (на  $N_1$ ), если он непрерывен в каждой точке этого множества. Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, если он является непрерывным в нуле.

Нормой линейного оператора  $A$  называется число  $\|A\|_{N_1 \rightarrow N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$

Линейный оператор называется ограниченным, если существует  $\sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2} < +\infty$ .

**Теорема.** Линейный оператор  $A: N_1 \rightarrow N_2$ , является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

**Теорема.** Для любого  $y \in N_1$  выполнено неравенство  $\|Ay\|_{N_2} \leq \|A\|_{N_1 \rightarrow N_2} \cdot \|y\|_{N_1}$ , где  $A$  – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства  $N_1$  в нормированное пространство  $N_2$ .

Линейный оператор  $A$  называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности элементов  $y_n$  из  $N_1$  последовательность  $z_n = Ay_n$  элементов  $N_2$  такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (т.е. вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную).



Вполне непрерывный оператор является ограниченным (следовательно, непрерывным), однако не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

### Примеры решения задач

**Пример 2.1.** Докажите, что интегральный оператор Фредгольма  $Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)ds$  с непрерывным ядром является ограниченным при действии из  $C[a,b]$  в  $C[a,b]$  и найдите оценку сверху для нормы оператора.

**Решение.** Пусть  $z(x) = Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)ds$ , где  $y(s)$  - произвольная непрерывная на  $[a,b]$  функция, причем  $\|y\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| = 1$ . Так как ядро  $K(x,s)$  непрерывно на замкнутом ограниченном множестве (квадрате  $[a,b] \times [a,b]$ ), то оно ограничено.

Обозначив  $K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|$ , получим, что для любого  $x \in [a,b]$  имеет место

$$|z(x)| = \left| \int_a^b K(x,s)y(s)ds \right| \leq \int_a^b |K(x,s)| \cdot |y(s)| ds \leq \max_{s \in [a,b]} |y(s)| \cdot \int_a^b |K(x,s)| ds \leq \|y\|_{C[a,b]} \cdot K_0 \cdot (b-a).$$

Тогда  $\|Ay\|_{C[a,b]} = \|z\|_{C[a,b]} \equiv \max_{x \in [a,b]} |z(x)| \leq \underbrace{\|y\|_{C[a,b]}}_{=1} \cdot K_0 \cdot (b-a) = K_0 \cdot (b-a)$ , откуда следует, что оператор Фредгольма с непрерывным ядром, действующий из  $C[a,b]$  в  $C[a,b]$ , ограничен.

Так как доказанное выше неравенство верно для любой непрерывной функции  $y(x)$ :  $\|y\|_{C[a,b]} = 1$ , то и для нормы оператора справедлива оценка

$$\|A\| \equiv \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leq K_0 \cdot (b-a).$$

**Пример 2.2.** Докажите, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии из  $C[a,b]$  в  $C[a,b]$ .

**Решение.** Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность непрерывных на  $[a,b]$  функций  $y_n(x)$  и заметим, что для любого  $n$  имеет место оценка  $\|y_n\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y_n(x)| \leq M$ .

Пусть  $z_n(x) = Ay_n \equiv \int_a^b K(x,s)y_n(s)ds$ . Для решения задачи достаточно показать, что последовательность  $z_n(x)$  равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке  $[a,b]$ .

а) Докажем сначала равномерную ограниченность. Обозначим  $K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|$ . Тогда

$$|z_n(x)| = \left| \int_a^b K(x,s)y_n(s)ds \right| \leq \int_a^b \underbrace{|K(x,s)|}_{\leq K_0} \cdot \underbrace{|y_n(s)|}_{\leq M} ds \leq M \cdot K_0 \cdot (b-a) = C, \quad \text{что и требовалось}$$

доказать.

б) Докажем теперь равностепенную непрерывность последовательности  $z_n(x)$ . Возьмем произвольные точки  $x_1, x_2 \in [a,b]$ . Имеем

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left| \int_a^b [K(x_1,s) - K(x_2,s)] y_n(s) ds \right| \leq \int_a^b \underbrace{|K(x_1,s) - K(x_2,s)|}_{\leq M} \cdot |y_n(s)| ds.$$

Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Функция  $K(x, s)$  непрерывна по совокупности аргументов  $x, s$  на замкнутом ограниченном множестве  $[a, b] \times [a, b]$  и, следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $|K(x_1, s) - K(x_2, s)| \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)}$  при условии  $|x_1 - x_2| \leq \delta$ .

Итак, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , что

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \leq \int_a^b |K(x_1, s) - K(x_2, s)| \cdot |y_n(s)| ds \leq \int_a^b \underbrace{|K(x_1, s) - K(x_2, s)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)}} \underbrace{|y_n(s)|}_{\leq M} ds \leq \varepsilon$$

для всех  $n = 1, 2, \dots$  и любых  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , удовлетворяющих неравенству  $|x_1 - x_2| \leq \delta$ , т.е. последовательность  $z_n(x)$  равномерно непрерывна.

По теореме Арцела, из последовательности непрерывных функций  $z_n(x)$  можно выделить равномерно сходящуюся (к непрерывной функции!) подпоследовательность. Этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности  $z_n(x)$ , поэтому оператор  $A$  является вполне непрерывным при действии  $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ .

*Пример 2.3.* Доказать, что если линейный оператор  $B: N_2 \rightarrow N_3$  является ограниченным, а линейный оператор  $A: N_1 \rightarrow N_2$  вполне непрерывным, то  $BA: N_1 \rightarrow N_3$  — вполне непрерывный оператор ( $N_1, N_2, N_3$  — нормированные пространства).

*Решение.*

а) Оператор  $A: N_1 \rightarrow N_2$  является вполне непрерывным, поэтому для любой ограниченной последовательности  $z_n \in N_1$  соответствующая ей последовательность  $Az_n \in N_2$  является компактной.

б) Докажем, что ограниченный оператор  $B: N_2 \rightarrow N_3$  переводит компактную последовательность  $y_n \in N_2$  в компактную  $By_n \in N_3$ . Так как  $y_n$  компактна, то из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся  $y_{nk} \rightarrow y_0 \in N_2$ . Рассмотрим последовательность  $By_n \in N_3$  и любую ее подпоследовательность  $By_{nk}$ . Из соответствующей последовательности  $y_{nk} \in N_2$  можно выделить подпоследовательность  $y_{nm} \rightarrow y_0$ . Ввиду непрерывности оператора  $B$  последовательность  $By_{nm}$  также сходится:  $By_{nm} \rightarrow By_0 \in N_3$ , а значит  $By_n$  является компактной.

Поэтому оператор  $BA: N_1 \rightarrow N_3$  переводит любую ограниченную последовательность  $z_n \in N_1$  в компактную  $BAz_n \in N_3$ , т.е. является вполне непрерывным.

*Пример 2.4.* Пусть  $A$  — линейный ограниченный оператор, действующий в нормированном пространстве. Доказать, что множество элементов пространства таких, что  $Ay = \theta$ , образует замкнутое линейное подпространство (нуль-пространство оператора).

*Решение.*

а) Рассмотрим произвольные элементы  $y_1$  и  $y_2$  такие, что  $Ay_1 = \theta$  и  $Ay_2 = \theta$ . Тогда для любых  $\alpha_1, \alpha_2$  выполнено  $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2 = \theta$ , т.е. множество элементов  $y: Ay = \theta$  — линейное пространство.

б) Докажем его замкнутость, т.е. если  $Ay_n = \theta$  и  $y_n \rightarrow y_0$ , то  $Ay_0 = \theta$ .

Так как  $A$  — ограниченный линейный оператор, то

$$\|Ay_0\| = \|(Ay_0 - Ay_n) + Ay_n\| \leq \|Ay_0 - Ay_n\| + \underbrace{\|Ay_n\|}_{=0} \leq \|A\| \cdot \|y_0 - y_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому  $\|Ay_0\| = 0$ , а значит  $Ay_0 = \theta$ , что и требовалось доказать.

*Замечание.* Так как вполне непрерывный оператор является ограниченным, то доказанное утверждение справедливо и для вполне непрерывного оператора.

*Пример 2.5.* Доказать, что если линейный оператор  $A$  имеет обратный, то обратный оператор  $A^{-1}$  также является линейным.

*Решение.* Пусть  $A$  - взаимно однозначный оператор, тогда существует обратный оператор  $A^{-1}$ . Для решения задачи достаточно проверить при любых  $y_1, y_2 \in R(A)$  и любых  $\alpha_1, \alpha_2$  справедливость равенства  $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$ .

Пусть  $Ax_1 = y_1$ ,  $Ax_2 = y_2$ , тогда из линейности оператора  $A$  следует

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$

и по определению обратного оператора  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$ .

С другой стороны,  $A^{-1}y_1 = x_1$ ,  $A^{-1}y_2 = x_2$ , откуда умножая на  $\alpha_1, \alpha_2$  и складывая, получим

$$\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Из двух последних равенств имеем  $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2$ , что и требовалось доказать.

*Пример 2.6.* Доказать, что если оператор  $A$  линейный, то обратный оператор  $A^{-1}$  существует тогда и только тогда, когда оператор  $A$  невырожденный.

*Решение.*

а) Достаточность. Пусть оператор  $A$  невырожденный, т.е.  $Ax = \theta \Leftrightarrow x = \theta$  (нуль-пространство оператора  $A$  тривиально). Тогда для любых двух элементов  $x_1 \neq x_2$  имеем  $A(x_1 - x_2) \neq \theta \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$ , т.е. оператор  $A$  взаимно однозначный, а значит существует обратный оператор  $A^{-1}$ .

б) Необходимость. Пусть оператор  $A$  имеет обратный  $A^{-1}$ . Заметим, что  $A^{-1}$  - линейный оператор (см. пример 2.5) и докажем что  $A$  - невырожденный. Пусть это не так, т.е. существует  $x \neq \theta$  такой, что  $Ax = \theta$ . Тогда  $\theta \neq x = A^{-1}Ax = A^{-1}(\underbrace{Ax}_{=\theta}) = A^{-1}\theta = \theta$ . Полученное

противоречие показывает, что если  $Ax = \theta$ , то  $x = \theta$ , т.е. оператор  $A$  - невырожденный.

*Пример 2.7.* Пусть оператор дифференцирования  $A = \frac{d}{dx}$  определен на подпространстве  $C_0^{(1)}[0,1]$  непрерывно дифференцируемых функций  $y(x)$ , удовлетворяющих условию  $y(0) = 0$ . Доказать, что оператор  $A$  имеет обратный и найти  $A^{-1}$ .

*Решение.* Множеством значений оператора  $A$  является пространство  $C[0,1]$ . Докажем, что обратный оператор  $A^{-1}$  существует. Так как уравнение  $Ay = \theta \Leftrightarrow \frac{d}{dx}y(x) \equiv 0, y(0) = 0$  имеет единственное решение  $y(x) \equiv 0 = \theta$ , т.е. нуль-пространство оператора  $A$  тривиально, то оператор  $A$  невырожденный, и обратный оператор  $A^{-1}$  существует.

Чтобы найти  $A^{-1}$ , нужно для любой функции  $z(x) \in C[0,1]$  решить уравнение  $Ay = z$  ( $y(x) \in C_0^{(1)}[0,1]$ ), или  $\frac{d}{dx}y(x) = z(x)$ ,  $y(0) = 0$ . Решением указанной задачи Коши является  $y(x) = \int_0^x z(s) ds$ , т.е.  $A^{-1}z = \int_0^x z(s) ds$ .

*Замечание.* Если рассматривать оператор дифференцирования  $A = \frac{d}{dx}$ , действующим  $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$ , то он является вырожденным, так как нуль-пространство в этом случае нетривиально и состоит из функций  $y(x) = c$ . Поэтому обратный оператор не существует. Вспомните, что первообразная непрерывной функции определяется с точностью до постоянной (элемент из  $\text{Ker } A$  (нуль-пространства) оператора  $A = \frac{d}{dx}$ ), т.е. отображение  $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$ , осуществляемое оператором дифференцирования, не является взаимно однозначным.

*Пример 2.8.* Доказать, что если оператор  $A$ , действующий в бесконечномерном нормированном пространстве, является вполне непрерывным, то обратный оператор неограничен.

*Решение.* Предположим, что обратный оператор  $A^{-1}$  является ограниченным. Так как  $A$  - вполне непрерывный оператор, а по предположению, оператор  $A^{-1}$  является ограниченным, то оператор  $A^{-1}A$  является вполне непрерывным (см. пример 2.3), что неверно, так тождественный оператор  $A^{-1}A = I$  не является вполне непрерывным (см. курс лекций). Полученное противоречие доказывает, что  $A^{-1}$  - неограничен.

*Пример 2.9.* Рассмотрим оператор Вольтерра  $Bu = \int_0^x y(s) ds$  ( $x \in [0,1]$ ), действующий в пространстве  $C[0,1]$ .

- Доказать, что  $B$  является ограниченным.
- Доказать, что  $B$  имеет обратный оператор, который определен на некотором подпространстве и неограничен.
- Построить оператор  $(I - B)^{-1}$ .

*Решение.*

а) Очевидно, что оператор  $B$  является линейным и определен на всем пространстве  $C[0,1]$ . Рассмотрим множество  $\|y\| = \max_{x \in [0,1]} |y(x)| = 1$ . На этом множестве имеем

$\|Bu\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x y(s) ds \right| \leq \max_{x \in [0,1]} \int_0^x |y(s)| ds \leq 1$ , что и доказывает ограниченность рассматриваемого оператора.

б) Оператор  $B$  отображает все пространство  $C[0,1]$  на линейное подпространство непрерывно дифференцируемых функций  $z(x) = Bu = \int_0^x y(s) ds$ , удовлетворяющих условию  $z(0) = 0$ . Так как из равенства  $\int_0^x y(s) ds = 0$  (верного для всех  $x \in [0,1]$ ) вытекает, что

$y(x) \equiv 0$ , то  $By = \theta \Leftrightarrow y = \theta$ , т.е. нуль-пространство оператора  $B$  содержит только нулевой элемент. Следовательно, оператор  $B$  - невырожденный, и имеет обратный, который определен на указанном выше подпространстве. Обозначим  $D(A^{-1})$  - область определения оператора  $A^{-1}$ .

Легко видеть, что  $B^{-1} = \frac{d}{dx}$ , так как  $BB^{-1}y = \int_0^x y'(s) ds = y(x) - y(0) = y(x)$  и

$$B^{-1}By = \frac{d}{dx} \int_0^x y(s) ds = y(x).$$

Докажем, что обратный оператор неограничен. Рассмотрим последовательность  $y_n \in D(A^{-1}) \subset C[0,1]$ :  $y_n(x) = \sin 2\pi nx$ ,  $(y_n(0) = 0!!!)$ ,  $\|y_n\|_{C[0,1]} = 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда

$$\|B^{-1}y_n\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{d}{dx} \sin 2\pi nx \right| = 2\pi n \rightarrow \infty, \text{ т.е. } \sup_{y \in D(A^{-1}), \|y\|=1} \|B^{-1}y\| \text{ не существует, и оператор}$$

$B^{-1}$  является неограниченным.

*Замечание 1.* Действуя аналогично примеру 2.2, можно показать, что рассматриваемый в данном примере оператор Вольтерра является вполне непрерывным, следовательно, обратный оператор неограничен (пример 2.8).

в) Чтобы построить оператор  $(I - B)^{-1}$ , нужно для произвольной непрерывной функции  $z(x)$  решить уравнение  $y(x) - \int_0^x y(s) ds = z(x)$ . Заметим сразу, что  $y(0) = z(0)$ .

Так как  $z(x)$  может не быть дифференцируемой, то ищем решение в виде  $y(x) = z(x) + w(x)$ , где  $w(x)$  - новая неизвестная функция, для которой имеем  $w(x) = \int_0^x z(s) ds + \int_0^x w(s) ds$ ,  $w(0) = 0$ . Очевидно, что  $w(x)$  дифференцируема; для ее определения получаем задачу Коши  $w'(x) = w(x) + z(x)$ ,  $w(0) = 0$ , решение которой имеет вид  $w(x) = e^x \int_0^x z(s) e^{-s} ds$ . Поэтому  $y(x) = z(x) + e^x \int_0^x z(s) e^{-s} ds$ , и обратный оператор  $(I - B)^{-1}$  определяется формулой  $(I - B)^{-1}z = z(x) + \int_0^x z(s) e^{x-s} ds$ .

*Замечание 2.* Рассмотрим оператор  $B^2 y = \int_0^x dt \int_0^t y(s) ds = \int_0^x y(s) ds \int_s^x dt = \int_0^x (x-s) y(s) ds$ . Легко показать, например, методом математической индукции, что

$$B^{n+1}y = BB^n y = \int_0^x dt \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} y(s) ds = \int_0^x y(s) ds \int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_0^x \frac{(x-s)^n}{n!} y(s) ds.$$

Далее, разложив функцию  $e^{x-s}$  в ряд  $e^{x-s} = \sum_0^\infty \frac{(x-s)^n}{n!}$ , будем иметь

$$(I - B)^{-1}z = z(x) + \int_0^x \sum_0^\infty \frac{(x-s)^n}{n!} z(s) ds = z + \sum_0^\infty B^{n+1}z. \text{ Таким образом, мы получили}$$

представление оператора  $(I - B)^{-1}$  в виде ряда Неймана  $(I - B)^{-1} = I + \sum_1^\infty B^n$ .

**Пример 2.10.** Доказать, что оператор дифференцирования  $A = \frac{d}{dx}$

а) не является вполне непрерывным при действии  $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ;

б) является вполне непрерывным при действии  $C^{(2)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$ .

*Решение.*

а) Рассмотрим в пространстве  $C^{(1)}[0,1]$  последовательность  $y_n = \frac{1}{2^n} \cos 2^n \pi x$ ,  $n=1,2,3,\dots$

Эта последовательность ограничена в  $C^{(1)}[0,1]$ , так как для любого номера  $n$  имеем  $\|y_n\|_{C^{(1)}[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |y_n(x)| + \max_{x \in [0,1]} |y'_n(x)| = \frac{1}{2^n} + 1 < 2$ . Однако последовательность образов ее элементов, получаемая при действии оператора дифференцирования  $Ay_n = \pi \sin 2^n \pi x$ ,  $n=1,2,3,\dots$  некомпактна в пространстве  $C[0,1]$  (см. пример 1.7). Поэтому оператор дифференцирования не является вполне непрерывным при действии  $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$ .

а) Пусть  $y_n$  - произвольная ограниченная последовательность в пространстве  $C^{(2)}[0,1]$ , т.е. существует  $M > 0$  такая, что  $\|y_n\|_{C^{(2)}[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |y_n(x)| + \max_{x \in [0,1]} |y'_n(x)| + \max_{x \in [0,1]} |y''_n(x)| \leq M$  для любого номера  $n$ . Заметим, что отсюда сразу вытекают два неравенства:  $\max_{x \in [0,1]} |y'_n(x)| \leq M$  и  $\max_{x \in [0,1]} |y''_n(x)| \leq M$ .

Рассмотрим последовательность  $z_n(x) = Ay_n = \frac{d}{dx} y_n(x)$ . Все функции  $z_n(x)$  непрерывны, причем, ввиду сделанного замечания, последовательность  $z_n(x) = y'_n(x)$  равномерно ограничена.

Докажем, что последовательность  $z_n(x)$  равностепенно непрерывна. Действительно, так как  $\max_{x \in [0,1]} |y''_n(x)| \leq M$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta$ , что  $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ . Поэтому при всех  $x_1, x_2 \in [0,1]$ ,  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  имеет место неравенство  $|y'_n(x_1) - y'_n(x_2)| = |y''_n(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leq M\delta \leq \varepsilon$ .

Далее, применяя теорему Арцела, получаем, что последовательность  $z_n = Ay_n$  компактна в  $C[0,1]$ , а оператор дифференцирования  $A = \frac{d}{dx}$  является вполне непрерывным при действии  $C^{(2)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$ .

### Задачи для самостоятельного решения

- 2.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма отображает линейное пространство  $h[a,b]$  в себя и является линейным оператором.
- 2.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра отображает линейное пространство  $h[a,b]$  в себя и является линейным оператором.
- 2.3 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.
- 2.4 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

- 2.5 Доказать, что нелинейный интегральный оператор  $Ay = \int_0^1 e^{xs} y^2(s) ds$ , действующий  $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ , является непрерывным и  $\sup_{\|y\|=1} \|Ay\| < +\infty$ .

*Замечание:* результат предыдущей задачи в данном случае, вообще говоря, неприменим, так как оператор не является линейным.

- 2.6 Доказать эквивалентность двух определений непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
- 2.7 Доказать, что линейный оператор ограничен тогда и только тогда, если существует постоянная  $C > 0$ , что для любого элемента  $y$  выполнено неравенство  $\|Ay\| \leq C \|y\|$ .
- 2.8 Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из  $C^{(1)}[a,b]$  в  $C[a,b]$ , является ограниченным.
- 2.9 Доказать, что оператор дифференцирования, определенный на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций пространства  $C[a,b]$  и действующий из  $C[a,b]$  в  $C[a,b]$ , не является ограниченным.
- 2.10 Доказать, что если  $A$  - линейный ограниченный оператор, действующий  $A: N_1 \rightarrow N_2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  - нормированные пространства, причем  $Ay \neq 0$ , то  $\|A\| > 0$ .
- 2.11 а) Доказать, что линейный оператор  $A$  имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, если существует число  $m > 0$  такое, что для всех  $y \in D(A)$  выполнено  $\|Ay\| \geq m \|y\|$ .

б) Доказать, что в этом случае норма обратного оператора равна  $\|A^{-1}\| = \frac{1}{M}$ , где  $M$  - максимальное из возможных значений  $m$ , найденных в п. а).

- 2.12 Доказать, что если линейный оператор  $B: N_2 \rightarrow N_3$  является вполне непрерывным, а линейный оператор  $A: N_1 \rightarrow N_2$  ограниченный, то  $BA: N_1 \rightarrow N_3$  - вполне непрерывный оператор ( $N_1, N_2, N_3$  - нормированные пространства). Сравнить с результатом примера 2.3.
- 2.13 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из  $h[a,b]$  в  $C[a,b]$ , является вполне непрерывным оператором.
- 2.14 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из  $h[a,b]$  в  $h[a,b]$ , является вполне непрерывным оператором.

- 2.15 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра  $Bu = \int_a^x K(x,s) u(s) ds$  является вполне непрерывным при действии  $C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ .

- 2.16 Доказать, что оператор умножения на независимую переменную  $x: Ay = x \cdot y(x)$ , действующий  $C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ , не является вполне непрерывным.
- 2.17 Доказать, что единичный оператор, действующий в пространстве  $C[a,b]$ , не является вполне непрерывным.

- 2.18 Доказать, что интегральный оператор  $Ay = \int_0^1 \frac{y(s)}{\sqrt{(x-s)^2}} ds$  не является вполне непрерывным при действии  $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ .

- 2.19 Доказать, что дифференциальный оператор  $Ay = \frac{d}{dx} y(x) + 4y(x)$ , действующий  $C_0^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$  ( $C_0^{(1)}[0,1]$  - подпространство непрерывно дифференцируемых на  $[0,1]$  функций, удовлетворяющих условию  $y(0) = 0$ , с нормой пространства  $C^{(1)}[0,1]$ ), имеет ограниченный обратный, и найти его.

Ответ:  $A^{-1}y = \int_0^x e^{-4(x-s)} y(s) ds$ .

### ТЕМА 3

#### *Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора.*

##### Основные определения и теоремы

Оператор  $A^*: E \rightarrow E$ , действующий в евклидовом пространстве, называется сопряженным к оператору  $A$ , если  $\forall y_1, y_2 \in E \quad (Ay_1, y_2) = (y_1, A^*y_2)$ . Если  $A = A^*$ , то оператор  $A$  называется самосопряженным.

Пусть линейный оператор  $A$  действует в линейном пространстве  $L$ . Число  $\Lambda$  называется собственным значением оператора  $A$ , если существует элемент  $y \neq \theta$  такой, что  $Ay = \Lambda y$ . Элемент  $y$  называется собственным вектором. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\Lambda$ , является подпространством пространства  $L$ .

Число  $\lambda = \frac{1}{\Lambda}$  ( $\Lambda \neq 0$ ) называется характеристическим числом оператора  $A$ .

**Теорема.** Самосопряженный вполне непрерывный оператор  $A$ , действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению  $\Lambda$ :  $|\Lambda| = \|A\|$ . Это собственное значение является максимальным по модулю среди всех собственных значений оператора  $A$ .

Теорема, вообще говоря, не верна, если отказаться от условий самосопряженности или вполне непрерывности оператора (см. примеры в конце темы).

Элемент  $e$  называется максимальным элементом (вектором) оператора  $A$ , если  $\|e\| = 1$  и  $\|Ae\| = \|A\|$ . Самосопряженный вполне непрерывный оператор  $A$  обладает максимальным вектором.

Если  $z$  - максимальный вектор самосопряженного оператора  $A$ , то  $z$  - собственный вектор оператора  $A^2$ , соответствующий собственному значению  $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$ . Если оператор  $A^2$  обладает собственным вектором  $z$ , соответствующим собственному значению  $M^2$ , то оператор  $A$  имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению  $M$  или  $-M$ .

**Теорема.** Пусть ядро  $K(x, s)$  оператора Фредгольма  $Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds$   $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$  является вещественным, симметрическим, непрерывным по совокупности переменных  $(x, s) \in [a, b] \times [a, b]$ , и не равно тождественно нулю. Тогда оператор Фредгольма обладает собственным значением  $\Lambda$ ,  $\Lambda \neq 0$ :  $Ay = \Lambda y$ ,  $y \neq 0$ ,  $y \in h[a, b]$ .

Иногда удобнее использовать характеристические числа:  $\lambda = \frac{1}{\Lambda}$ ,  $\Lambda \neq 0$ . Тогда в утверждении теоремы следует записать  $\lambda Ay = y$ .

**Теорема.** Собственные векторы самосопряженного оператора  $A$ , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.



**Теорема.** Число собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора  $A$ , удовлетворяющих условию:  $\|A\| \geq |\lambda| \geq \delta > 0$ , ( $\delta$  - фиксированное положительное число) конечно.

Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению, называется кратностью (рангом) собственного значения.

**Теорема.** Ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора  $A$  может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов. Нулевому собственному значению может отвечать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных векторов.

**Теорема.**

а) Множество собственных значений самосопряженного вполне непрерывного оператора  $A$ , действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве, представляет собой: либо бесконечную последовательность, тогда  $\|A\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$  - монотонно невозрастающая и ограниченная снизу нулем; либо конечную последовательность, тогда  $\|A\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| > \lambda_{n+1} = 0$  (каждое собственное значение повторяется в эти неравенствах столько раз, какова его кратность).

б) Если ненулевых собственных значений бесконечно много, то  $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

в) Каждому собственному значению отвечает хотя бы один собственный вектор, причем можно выбрать собственные векторы так, что они образуют ортонормированную систему (собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ортогональны, а собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно ортогонализировать, используя процедуру Грама-Шмидта).

Для характеристических чисел вполне непрерывного самосопряженного оператора справедливы аналогичные результаты:

либо  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$  (конечная последовательность характеристических чисел);

либо  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$  (бесконечная последовательность характеристических чисел).

В этом случае  $\lim_{n \leftarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ .

Каждому характеристическому числу  $\lambda_n$  можно сопоставить собственный вектор  $\varphi_n$ , причем векторы  $\{\varphi_n\}$  образуют ортонормированную систему.

Аналогичные утверждения верны для интегрального оператора с непрерывным, симметрическим и неравным тождественно нулю ядром. В этом случае вместо слов собственные векторы говорят собственные функции интегрального оператора или собственные функции ядра  $K(x, s)$ .

Пусть  $A$  - вполне непрерывный самосопряженный оператор со следующей последовательностью характеристических чисел (неважно, конечной или бесконечной):  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ , которым соответствует ортонормированная последовательность собственных векторов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ .

**Теорема.** Вектор  $y$  принадлежит нуль-пространству оператора  $A$  ( $y \in \text{Ker } A$ ) тогда и только тогда, если  $(y, \varphi_k) = 0$   $k = 1, 2, \dots$  ( $\varphi_k$  - конечная или бесконечная последовательность).

**Теорема Гильберта-Шмидта.** Функция  $f(x)$  называется истокопредставимой через ядро  $K(x, s)$ , если существует непрерывная функция  $g(s)$  такая, что

$f(x) = \int_a^b K(x, s) g(s) ds$ . Если функция  $f(x)$  истокопредставима через симметрическое

непрерывное ядро  $K(x, s)$ , то она может быть разложена в ряд  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$ , где

$$f_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds, \text{ причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на } [a, b].$$

Можно рассматривать оператор Фредгольма в пространстве непрерывных комплекснозначных функций  $h^C[a, b]$ , состоящем из комплекснозначных функций вещественной переменной  $x$ :  $y(x) = u(x) + i v(x)$   $x \in [a, b]$ , функции  $u(x)$ ,  $v(x)$  – непрерывные на  $[a, b]$  вещественные функции. В этом пространстве скалярное произведение вводится так:  $(y_1, y_2) = \int_a^b y_1^*(x) y_2(x) dx$  (здесь  $*$  – знак комплексного сопряжения).

**Теорема.** Пусть интегральный оператор с непрерывным симметрическим вещественным ядром  $K(x, s)$  действует в комплексном пространстве  $h^C[a, b]$ . Тогда этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

Если ядро  $K(x, s)$  является вырожденным, т.е. представимо в виде  $K(x, s) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$ , где  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  и  $b_1(s), \dots, b_n(s)$  – линейно независимы и непрерывны по своим аргументам на  $[a, b]$ , то интегральный оператор является вырожденным. В этом случае и у него всегда есть нулевое собственное значение, причем кратность его равна  $\infty$ . Отыскание других собственных значений сводится к решению эквивалентной алгебраической задачи на собственные значения и собственные векторы для некоторой матрицы

$$\Lambda c_i = \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x) b_i(x) dx}_{k_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{или } K \cdot C = \Lambda \cdot C, \quad \text{где } K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Собственные значения  $\Lambda_n$  матрицы  $K$  и, следовательно, собственные значения (и характеристические числа  $\lambda_n = \frac{1}{\Lambda_n}$ ) интегрального оператора Фредгольма теперь можно найти, решив характеристическое уравнение  $\det(K - \Lambda I) = 0$ .

Некоторые задачи на нахождение характеристических чисел и собственных функций оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром рассмотрены также в примерах к теме 7.

## Примеры решения задач

**Пример 3.1.** Пусть  $M$  - подпространство евклидова пространства, инвариантное относительно самосопряженного оператора  $A$ . Доказать, что ортогональное дополнение  $M_{\perp}$  подпространства  $M$  также инвариантно относительно оператора  $A$ .

**Решение.** Рассмотрим любые элементы  $y \in M$  и  $z \in M_{\perp}$ , т.е. такие, что  $(y, z) = 0$ . Подпространство  $M$  инвариантно относительно оператора  $A$ . Это означает, что для любого  $y \in M$  элемент  $Ay \in M$ , т.е.  $(Ay, z) = 0$ . Нужно доказать, что  $Az \in M_{\perp}$ .

Оператор  $A$  - самосопряженный, поэтому  $(Ay, z) = (y, Az) = 0$ , т.е. элемент  $Az$  ортогонален любому  $y \in M$ . Следовательно  $Az \in M_{\perp}$ , что и требовалось доказать.

**Пример 3.2.** Доказать, что норма вполне непрерывного самосопряженного оператора может быть найдена по формуле  $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$ .

**Решение.** Обозначим  $\mu = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$  и докажем, что указанная точная верхняя грань существует. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получим  $|(Ay, y)| \leq \|Ay\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{=1} \leq \|A\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{=1} = \|A\|$ , откуда следует существование  $\sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$  и оценка  $\mu = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)| \leq \|A\|$ .

Докажем теперь, что справедливо неравенство  $\mu \geq \|A\|$ . Для любого элемента  $y$  норма элемента  $y_0 = \frac{y}{\|y\|}$  равна единице. Поэтому  $|(Ay_0, y_0)| \leq \sup_{\|y_0\|=1} |(Ay_0, y_0)| = \mu$ , откуда получаем  $|(Ay, y)| \leq \mu \cdot \|y\|^2$ . Пользуясь линейностью оператора  $A$ , свойствами скалярного произведения и равенством  $(Ay, z) = (y, Az)$  (определение самосопряженного оператора), нетрудно получить  $4(Ay, z) = (A(y+z), y+z) - (A(y-z), y-z)$ . Из этого равенства с учетом полученной выше оценки, имеем

$$4|(Ay, z)| = |(A(y+z), y+z) - (A(y-z), y-z)| \leq |(A(y+z), y+z)| + |(A(y-z), y-z)| \leq \mu \cdot \|y+z\|^2 + \mu \cdot \|y-z\|^2 = 2\mu \cdot (\|y\|^2 + \|z\|^2).$$

Поэтому для произвольных элементов пространства таких, что  $\|y\| = 1$  и  $\|z\| = 1$ , верно  $|(Ay, z)| \leq \mu$ . Полагая  $z = \frac{Ay}{\|Ay\|}$ , получим  $\frac{|(Ay, Ay)|}{\|Ay\|} = \|Ay\| \leq \mu$  для любых  $y$ , таких что  $\|y\| = 1$ , откуда следует  $\|A\| \leq \mu$ .

Итак,  $\mu \leq \|A\| \leq \mu$ , поэтому  $\|A\| = \mu = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$ , что и требовалось.

**Замечание.** Обратившись к теореме о существовании собственного вектора вполне непрерывного самосопряженного оператора, можно заключить, что если в рассмотренной задаче оператор  $A$  - вполне непрерывный, то максимальное по модулю собственное значение его удовлетворяет соотношению  $|\Lambda| = \|A\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$

*Пример 3.3.* Рассмотрим оператор умножения  $Ay = (1-x) \cdot y(x)$ , действующий в пространстве  $h[0,1]$ .

- а) Доказать, что указанный оператор является ограниченным, и найти его норму.  
 б) Доказать, что у него нет максимального вектора.

*Решение.*

а) Напомним, что нормой линейного оператора называется число  $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$ .

Рассмотрим в пространстве  $h[0,1]$  множество функций  $y(x)$ :  $\|y\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 y^2(x) dx} = 1$ .

Тогда  $\|Ay\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 (1-x)^2 y^2(x) dx} \leq \sqrt{\int_0^1 y^2(x) dx} = 1$ , поэтому оператор ограничен и для нормы оператора получаем оценку  $\|A\| \leq 1$ .

Докажем, что норма рассматриваемого оператора равна 1. Для этого достаточно построить последовательность  $y_n(x)$  непрерывных функций такую, что  $\|Ay_n\|_{h[0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

$$\text{Пусть } y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{3n} \cdot (1-nx), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что  $\forall n \quad \|y_n\|_{h[0,1]} = 1$  и

$$\|Ay_n\|_{h[0,1]}^2 = 3n \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 \cdot (1-x)^2 dx = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{10n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Поэтому  $\|A\| = 1$ .

б) Докажем, что у рассматриваемого оператора в пространстве  $h[0,1]$  нет максимального вектора. Напомним, что элемент  $y$ :  $\|y\| = 1$  называется максимальным вектором ограниченного оператора, если  $\|Ay\| = \|A\|$ . Предположим, что  $y_0(x)$ :  $\|y_0\| = 1$  является максимальным вектором рассматриваемого оператора, тогда

$$\|y_0\|^2 = \int_0^1 y_0^2(x) dx = 1, \quad \|Ay_0\|^2 = \int_0^1 (1-x)^2 \cdot y_0^2(x) dx = \|A\|^2 = 1. \text{ Вычитая последние два}$$

равенства, получим  $\int_0^1 \underbrace{[1 - (1-x)^2]}_{>0} \cdot y_0^2(x) dx = 0$ , что невозможно.

Таким образом, сделанное предположение неверно, т.е. максимального вектора у оператора нет.

*Замечание.* Рассмотренный оператор умножения в пространстве  $h[0,1]$  является самосопряженным, но не вполне непрерывным, поэтому теорема о существовании максимального вектора в данном случае неприменима.

*Пример 3.4.* Пусть  $K^{(2)}(x, s) = K(x, s) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$ , где  $\varphi_1$  - нормированная собственная

функция оператора Фредгольма  $Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds$  с непрерывным симметрическим

ядром, отвечающая характеристическому числу  $\lambda_1$ . Рассмотрим интегральный оператор

$$A^{(2)} \text{ с ядром } K^{(2)}(x, s): A^{(2)}y = \int_a^b K^{(2)}(x, s) y(s) ds.$$

Доказать, что:

а) все собственные функции  $\varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  оператора  $A$ , отвечающие характеристическим числам  $|\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ , являются также собственными функциями оператора  $A^{(2)}$ , соответствующими тем же характеристическим числам  $|\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ ;

б) оператор  $A^{(2)}$  не имеет других характеристических чисел, отличных от  $\lambda_k$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$ ;

в) функция  $\varphi_1$  также является собственной функцией оператора  $A^{(2)}$ , соответствующей нулевому собственному значению ядра  $K^{(2)}(x, s)$ .

*Решение.* Так как ядро оператора  $A$  непрерывно и симметрично, то и ядро  $K^{(2)}(x, s)$  удовлетворяет тем же условиям, т.е. оператор  $A^{(2)}$  является вполне непрерывным и самосопряженным. Заметим также, что действие оператора  $A^{(2)}$  можно представить в следующем виде:  $A^{(2)}y = \int_a^b [K(x, s) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}] y(s) ds = Ay - \frac{\varphi_1}{\lambda_1}(\varphi_1, y)$ .

Напомним, что собственные функции самосопряженного оператора образуют ортогональную систему, и  $A\varphi_k = \int_a^b K(x, s)\varphi_k(s) ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k$ . Будем считать также, что

$$\|\varphi_k\|^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x) dx = 1.$$

а) Для любой собственной функции  $\varphi_k$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$  оператора  $A$  имеем

$$A^{(2)}\varphi_k = \int_a^b K^{(2)}(x, s)\varphi_k(s) ds = \int_a^b K(x, s)\varphi_k(s) ds - \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\varphi_k(s) ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) - 0 = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

т.е.  $\varphi_k$  является собственной функцией оператора  $A^{(2)}$ , соответствующей характеристическому числу  $\lambda_k$ .

б) Пусть  $\tilde{\lambda}$  - характеристическое число оператора  $A^{(2)}$ , а  $\tilde{\varphi}$  - отвечающая ему собственная функция, т.е.  $A^{(2)}\tilde{\varphi} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{\varphi}$ . Докажем, что  $\tilde{\lambda}$  является также характеристическим числом оператора  $A$ , т.е. совпадает с одним из  $\lambda_k$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$ .

Действительно

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda} A^{(2)}\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda} \int_a^b K^{(2)}(x, s)\tilde{\varphi}(s) ds = \tilde{\lambda} \int_a^b K(x, s)\tilde{\varphi}(s) ds - \tilde{\lambda} \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\tilde{\varphi}(s) ds = \tilde{\lambda} A\tilde{\varphi} - 0 = \tilde{\lambda} A\tilde{\varphi},$$

т.е.  $\tilde{\lambda}$  является характеристическим числом оператора  $A$ , что и требовалось. Здесь было использовано неочевидное (так как  $\varphi_k$  и  $\tilde{\varphi}$  - собственные функции различных операторов!!!) соотношение

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_1(s) \tilde{\varphi}(s) ds &= (\varphi_1, \tilde{\varphi}) = (\varphi_1, \tilde{\lambda} A^{(2)} \tilde{\varphi}) = \tilde{\lambda} (\varphi_1, A^{(2)} \tilde{\varphi}) = (A^{(2)} - \text{самосопряженный}) = \tilde{\lambda} (A^{(2)} \varphi_1, \tilde{\varphi}) = \\ &= \tilde{\lambda} \left[ (A \varphi_1, \tilde{\varphi}) - \frac{(\varphi_1, \tilde{\varphi})}{\lambda_1} \underbrace{(\varphi_1, \varphi_1)}_{=1} \right] = \tilde{\lambda} \left[ \left( \frac{\varphi_1}{\lambda_1}, \tilde{\varphi} \right) - \frac{(\varphi_1, \tilde{\varphi})}{\lambda_1} \right] = 0. \end{aligned}$$

в)  $A^{(2)} \varphi_1 = A \varphi_1 - \frac{\varphi_1}{\lambda_1} (\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_1(x) - \frac{1}{\lambda_k} \varphi_1(x) = 0 \cdot \varphi_1(x)$ , следовательно  $\varphi_1$  - собственная функция оператора  $A^{(2)}$ , отвечающая собственному значению  $\Lambda_0 = 0$ .

**Пример 3.5.** Доказать, что оператор умножения на независимую переменную  $x$ :  $Ay = x \cdot y(x)$ , действующий в пространстве  $h[0,1]$

- а) является самосопряженным;
- б) не имеет собственных значений.

*Решение.*

а)  $(Ay, z) = \int_0^1 [x y(x)] \cdot z(x) dx = \int_0^1 y(x) \cdot [x z(x)] dx = (y, Az)$ , т.е.  $A$  - самосопряженный.

б) Рассмотрим уравнение  $Ay \equiv x \cdot y(x) = \lambda y(x) \Rightarrow (x - \lambda) \cdot y(x) = 0$ , откуда получаем  $y(x) \equiv 0$ . Итак, при любом  $\lambda$  уравнение  $Ay = \lambda y$  имеет только тривиальное решение, что и означает отсутствие собственных значений у оператора  $A$ .

*Замечание.* Рассматриваемый оператор не является вполне непрерывным (см. задачу 2.16), поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

**Пример 3.6.** Доказать, что оператор Вольтерра  $Ay = \int_0^x y(s) ds$  ( $x \in [0,1]$ ), действующий в пространстве  $h[0,1]$ :

- а) является вполне непрерывным;
- б) не имеет собственных значений.

*Решение.*

а) Докажем сначала, что  $A$  - вполне непрерывный оператор при действии  $h[0,1] \rightarrow C[0,1]$ .

Рассмотрим ограниченную последовательность  $y_n \in h[0,1]$ :

$$\|y_n\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 y_n^2(x) dx} \leq M, \quad n=1,2,\dots, \text{ и последовательность } z_n(x) = Ay_n = \int_0^x y_n(s) ds.$$

Докажем равномерную ограниченность  $z_n(x)$  в пространстве  $C[0,1]$ . Действительно,

$$|z_n(x)| = \left| \int_0^x y_n(s) ds \right| = \left| \int_0^x 1 \cdot y_n(s) ds \right| \leq \sqrt{\int_0^x ds \cdot \int_0^x y_n^2(s) ds} \leq \sqrt{\underbrace{\int_0^x ds}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\int_0^1 y_n^2(s) ds}_{\leq M^2}} \leq M$$

сразу для всех  $x \in [0,1]$  и всех  $n=1,2,\dots$ , откуда следует  $\|z_n\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |z_n(x)| \leq M$ , что и требовалось.

Докажем равностепенную непрерывность последовательности  $z_n(x)$ . Возьмем произвольные точки  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ . Имеем

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left| \int_0^{x_1} y_n(s) ds - \int_0^{x_2} y_n(s) ds \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y_n(s) ds \right| \leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} ds \cdot \int_{x_1}^{x_2} y_n^2(s) ds} \leq \sqrt{(x_2 - x_1) \cdot \underbrace{\int_0^1 y_n^2(s) ds}_{\leq M^2}}$$

Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем  $0 < \delta = \frac{\varepsilon^2}{M^2}$ . Тогда для всех  $n = 1, 2, 3, \dots$

и любых  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , удовлетворяющих условию  $|x_1 - x_2| \leq \delta = \frac{\varepsilon^2}{M^2}$ , имеем

$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \leq \varepsilon$ , т.е. последовательность  $z_n(x)$  равностепенно непрерывна.

Итак, последовательность функций  $z_n(x)$ , непрерывных на сегменте  $[0, 1]$ , равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела следует, что из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся при  $x \in [0, 1]$  к непрерывной функции. Очевидно, что этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности  $z_n(x)$ . Следовательно, оператор  $A$  является вполне непрерывным при действии  $h[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ .

Так как из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, то та же самая подпоследовательность непрерывных функций, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции, сходится и в среднем к той же функции. Поэтому оператор  $A$  является вполне непрерывным и при действии  $h[0, 1] \rightarrow h[0, 1]$ .

б) Покажем, что рассматриваемый оператор не имеет собственных значений.

Рассмотрим уравнение  $Ay \equiv \int_0^x y(s) ds = \Lambda y(x)$  и докажем, что при любом значении  $\Lambda$  оно имеет только тривиальное решение.

Если  $\Lambda = 0$ , то утверждение очевидно, так как в этом случае  $\int_0^x y(s) ds = 0 \cdot y(x) \equiv 0$  для всех  $x \in [0, 1]$  и, следовательно,  $y(x) \equiv 0$ .

При  $\Lambda \neq 0$  уравнению  $\int_0^x y(s) ds = \Lambda y(x)$  удовлетворяют функции вида  $y(x) = ce^{\frac{x}{\Lambda}}$ , а так как  $y(0) = 0$ , то и в этом случае единственным решением его при любом  $\Lambda$  будет  $y(x) \equiv 0$ , что и требовалось доказать.

*Замечание.* Рассматриваемый оператор не является самосопряженным. Действительно, путем интегрирования по частям легко показать, что

$$(Ay, z) = \int_0^1 \left[ \int_0^x y(t) dt \right] \cdot z(x) dx \neq \int_0^1 y(x) \cdot \left[ \int_0^x z(t) dt \right] dx = (y, Az).$$

Поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

*Пример 3.7.* Показать, что оператор Фредгольма  $Ay = \int_0^\pi \sin x \cos s y(s) ds$ ,  $x \in [0, \pi]$  не имеет характеристических чисел.

*Решение.* Рассмотрим уравнение  $y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin x \cos s y(s) ds$ . Требуется доказать, что ни для одного  $\lambda$  не существует нетривиальных решений этого уравнения.

Обозначим  $C = \int_0^\pi \cos s y(s) ds$ , тогда  $y(x) = \lambda C \sin x$ , и для определения  $C$  имеем

$C = \int_0^\pi \cos s \underbrace{C \lambda \sin s}_{y(s)} ds = 0$ . Следовательно,  $y(x) \equiv 0$  при любом  $\lambda$ , т.е. характеристических чисел у исследуемого оператора нет.

*Замечание.* В данном случае ядро  $K(x, s) = \sin x \cdot \cos s$  непрерывное, но не симметрическое, поэтому оператор является вполне непрерывным, но не самосопряженным, и теорема о существовании собственного вектора неприменима.

*Пример 3.8.* Найти характеристические числа и построить ортонормированные собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным вырожденным симметрическим ядром  $y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) y(s) ds$ .

*Решение.* Ядро исследуемого оператора симметрическое и непрерывное, следовательно, оператор Фредгольма в данной задаче является вполне непрерывным и самосопряженным.

Представим ядро в виде  $K(x, s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$  и обозначим

$\int_0^\pi \cos s y(s) ds = a_1$ ,  $\int_0^\pi \sin s y(s) ds = a_2$ . Тогда  $y(x) = \lambda a_1 \sin x + \lambda a_2 \cos x$ , где

$$a_1 = \int_0^\pi \cos s y(s) ds = \lambda \int_0^\pi \cos s (a_1 \sin s + a_2 \cos s) ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_2,$$

$$a_2 = \int_0^\pi \sin s y(s) ds = \lambda \int_0^\pi \sin s (a_1 \sin s + a_2 \cos s) ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_1.$$

Однородная система 
$$\begin{cases} a_1 - \frac{\lambda\pi}{2} a_2 = 0 \\ \frac{\lambda\pi}{2} a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$
 имеет нетривиальные решения при условии

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда определяем характеристические числа  $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$  и  $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ .



При  $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$  имеем  $a_2 = a_1$ , т.е. собственная функция  $y_1(x) = C(\sin x + \cos x)$ ;

при  $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$  получаем  $a_2 = -a_1$ , и собственная функция  $y_2(x) = C(\sin x - \cos x)$ .

Так как собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны, то искомая ортонормированная система имеет вид

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x), \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x).$$

*Пример 3.9.* Если для любых  $x, s \in [a, b]$  имеет место равенство  $K(x, s) = -K(s, x)$ , то ядро  $K(x, s)$  называется кососимметрическим.

Показать, что все отличные от нуля собственные значения оператора Фредгольма  $Ay = \int_a^b K(x, s)y(s)ds$ ,  $x \in [a, b]$  с вещественным кососимметрическим ядром - чисто мнимые числа.

*Решение.* Пусть  $\Lambda$  - одно из собственных значений, т.е.  $\int_a^b K(x, s)y(s)ds = \Lambda y(x)$ , где  $y(x) \neq 0$  - соответствующая собственная функция (возможно, комплекснозначная). Так как ядро вещественно, то имеет место также  $\int_a^b K(x, s)y^*(s)ds = \Lambda^* y^*(x)$ , где знак  $*$  означает комплексное сопряжение.

Умножим второе уравнение на  $y(x)$ , а первое - на комплексно сопряженную функцию  $y^*(x)$ , и проинтегрируем по отрезку  $[a, b]$ . Получим:

$$\begin{aligned} \Lambda \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \int_a^b y^*(x)dx \int_a^b K(x, s)y(s)ds, \\ \Lambda^* \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \int_a^b y(x)dx \int_a^b K(x, s)y^*(s)ds = \int_a^b y^*(s)ds \int_a^b K(x, s)y(x)dx. \end{aligned}$$

Меняя обозначения переменных интегрирования в последнем интеграле и учитывая, что  $K(x, s) = -K(s, x)$  приходим к соотношению

$$\Lambda^* \int_a^b |y(x)|^2 dx = \int_a^b y^*(x)dx \int_a^b K(s, x)y(s)ds = - \int_a^b y^*(x)dx \int_a^b K(x, s)y(s)ds.$$

Складывая первое и последнее равенства, найдем  $(\Lambda + \Lambda^*) \int_a^b |y(x)|^2 dx = 0$ . Так как  $y(x) \neq 0$ , то  $\Lambda^* = -\Lambda$ , т.е. либо  $\Lambda = 0$ , либо является чисто мнимым.

*Замечание.* Напомним, что все собственные значения самосопряженного оператора - вещественные числа. В рассмотренном случае интегральный оператор Фредгольма не является самосопряженным, поэтому собственные значения могут не быть вещественными (в данном примере все ненулевые собственные значения оказались чисто мнимыми).

**Пример 3.10.** Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с вырожденным кососимметрическим ядром  $Ay = \int_0^1 (x-s)y(s)ds$ ,  $x \in [0,1]$ .

**Решение.** Требуется найти такие  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения  $y(x) = \lambda \int_0^1 (x-s)y(s)ds$ . Обозначим  $C_1 = \int_0^1 y(s)ds$ ,  $C_2 = \int_0^1 s y(s)ds$ , тогда  $y(x) = \lambda(C_1 x - C_2)$ , и для определения  $C_1, C_2$  получим соотношения

$$C_1 = \lambda \int_0^1 \underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)} ds = \frac{\lambda}{2} C_1 - \lambda C_2, \quad C_2 = \lambda \int_0^1 s \cdot \underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)} ds = \frac{\lambda}{3} C_1 - \frac{\lambda}{2} C_2,$$

откуда

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) C_1 + \lambda C_2 = 0 \\ -\frac{\lambda}{3} C_1 + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) C_2 = 0 \end{cases}.$$

Нетривиальные решения системы существуют при условии

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & \lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1 + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = +i2\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -i2\sqrt{3}.$$

Пусть  $\lambda = \lambda_1 = 2i\sqrt{3}$  тогда, полагая  $C_1 = C \cdot 2\sqrt{3}$ , где  $C$  - произвольная постоянная, найдем  $C_2 = C \cdot (i + \sqrt{3})$  и собственные функции  $y_1(x) = \lambda_1(C_1 x - C_2) = C(12i x - 6i + 2\sqrt{3})$ .

Пусть  $\lambda = \lambda_2 = -2i\sqrt{3}$  тогда, также полагая  $C_1 = C \cdot 2\sqrt{3}$ , найдем  $C_2 = C \cdot (-i + \sqrt{3})$  и собственные функции  $y_2(x) = \lambda_2(C_1 x - C_2) = C(-12i x + 6i + 2\sqrt{3})$ .

**Замечание.** Если оператор несамосопряженный, то характеристические числа могут не быть действительными. В данном случае, ядро оператора  $K(x,s) = x-s$  не симметрическое, и характеристические числа оказались чисто мнимыми (см. пример 3.9).

### Задачи для самостоятельного решения

3.1 Пусть,  $K^{(n+1)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$ , где  $\varphi_k$  - собственные функции оператора

Фредгольма  $Ay = \int_a^b K(x,s) y(s) ds$  с вещественным непрерывным симметрическим ядром,

отвечающие характеристическим числам  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Рассмотрим интегральный

оператор  $A^{(n+1)}$  с ядром  $K^{(n+1)}(x,s)$ :  $A^{(n+1)}y = \int_a^b K^{(n+1)}(x,s) y(s) ds$ .

Доказать, что:

а) все собственные функции  $\varphi_k$ ,  $k = n+1, \dots$  оператора  $A$ , отвечающие характеристическим числам  $|\lambda_{n+1}| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots$ , являются также собственными функциями оператора  $A^{(n+1)}$ , соответствующими тем же характеристическим числам  $|\lambda_{n+1}| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots$ ;

- б) оператор  $A^{(n+1)}$  не имеет других характеристических чисел, отличных от  $\lambda_k$ ,  $k = n+1, \dots$ ;
- в) функции  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  также являются собственными функциями оператора  $A^{(n+1)}$ , соответствующими нулевому собственному значению ядра  $K^{(n+1)}(x, s)$ .
- 3.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром, действующий  $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$ , является самосопряженным оператором.
- 3.3 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра с непрерывным не равным тождественно нулю ядром, действующий  $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$ , не является самосопряженным оператором.
- 3.4 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра  $By = \int_a^x K(x, s) y(s) ds$  с вещественным непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии  $h[a, b] \rightarrow C[a, b]$  и  $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$ .
- 3.5 Пусть  $\varphi$  - собственный вектор самосопряженного оператора  $A$ , действующего в евклидовом пространстве. Доказать, что множество векторов, ортогональных  $\varphi$ , образуют замкнутое линейное подпространство, инвариантное относительно  $A$ .
- 3.6 Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим вещественным ядром  $K(x, s)$  действует в комплексном пространстве  $h^C[a, b]$  (комплексном расширении пространства  $h[a, b]$ ), то этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.
- 3.7 Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора  $A$ , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.
- 3.8 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с ядром  $K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$ , действующий в пространстве  $h[0, \pi]$ , является невырожденным.
- 3.9 Доказать, что нуль является простым собственным значением интегрального оператора Фредгольма с ядром  $K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$ , действующего в пространстве  $h[0, \pi]$ .
- 3.10 Доказать, что нулевое собственное значение интегрального оператора Фредгольма с ядром  $K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx \cdot \sin 2ns}{(2n)^2}$ , действующего в пространстве  $h[0, \pi]$ , имеет бесконечную кратность.
- 3.11 Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет конечную кратность.
- 3.12 Найти характеристические числа и собственные функции однородных уравнений Фредгольма с вырожденными непрерывными симметрическими ядрами в следующих случаях (все характеристические числа - вещественные):
- а)  $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos x \cos s y(s) ds$ ;
- б)  $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \sin s y(s) ds$ ;
- в)  $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+s) y(s) ds$ ;
- г)  $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-s) y(s) ds$ ;
- д)  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+s) y(s) ds$ ;
- е)  $y(x) = \lambda \int_0^1 xs y(s) ds$ ;

$$\text{ж) } y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xs + x^2 s^2) y(s) ds ;$$

$$\text{з) } y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x-s)) y(s) ds .$$

3.13 Найти характеристические числа и собственные функции уравнений Фредгольма с вырожденными несимметрическими ядрами (характеристические числа необязательно вещественные, и их может не быть вовсе):

$$\text{а) } y(x) = \lambda \int_0^1 (xs - 2x^2) y(s) ds ;$$

$$\text{б) } y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x-s) y(s) ds ;$$

$$\text{в) } y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos s y(s) ds ;$$

$$\text{г) } y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos x \sin s y(s) ds .$$

### Ответы к задачам

$$3.11 \quad Ay = \int_0^{\pi} K(x, s) y(s) ds, \quad \text{где } K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2} \quad (k \geq 2) .$$

$$3.12 \quad \text{а) } \lambda = \frac{2}{\pi}, \quad y(x) = C \cos x ;$$

$$\text{б) } \lambda = \frac{2}{\pi}, \quad y(x) = C \sin x ;$$

$$\text{в) } \lambda_1 = \frac{2}{\pi}, \quad y_1(x) = C \cos x; \quad \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}, \quad y_2(x) = C \sin x ;$$

$$\text{г) } \lambda = \frac{2}{\pi}, \quad y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (\text{ранг характеристического числа равен } 2).$$

$$\text{д) } \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_1(x) = C(1 + x\sqrt{3}); \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_2(x) = C(1 - x\sqrt{3});$$

$$\text{е) } \lambda = 3, \quad y(x) = Cx ;$$

$$\text{ж) } \lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad y_1 = Cx; \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = Cx^2 ;$$

$$\text{з) } \lambda_1 = \frac{1}{2\pi}, \quad y_1 = C; \quad \lambda_2 = \frac{1}{\pi}, \quad y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad (\text{ранг } \lambda_2 \text{ равен } 2).$$

$$3.13 \quad \text{а) } \lambda_1 = -6, \quad y_1 = C(x - 2x^2) ;$$

$$\text{б) } \lambda_1 = \frac{i}{\pi}, \quad y_1 = Ce^{ix}; \quad \lambda_2 = -\frac{i}{\pi}, \quad y_2 = Ce^{-ix} ;$$

в) характеристических чисел (и собственных функций) нет;

г) характеристических чисел (и собственных функций) нет.

## ТЕМА 4

### ***Принцип сжимающих отображений. Метод последовательных приближений для уравнения Фредгольма 2-рода с "малым" $\lambda$ .***

#### **Основные определения и теоремы**

Пусть  $D$  – оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий  $D: B \rightarrow B$ , где  $B$  – банахово (полное нормированное) пространство.

Оператор  $D$  называется сжимающим (или сжимающим отображением), если существует константа  $q$ :  $0 \leq q < 1$ , такая, что для любых  $y_1, y_2 \in B$  имеет место неравенство  $\|Dy_1 - Dy_2\| \leq q \|y_1 - y_2\|$ .

Элемент  $y$  называется неподвижной точкой оператора  $D$ , если  $Dy = y$ .

**Теорема (о неподвижной точке).** Пусть  $D$  – сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка  $y \in B$  такая, что  $Dy = y$ . Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений:  $y_{n+1} = Dy_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $y_0 \in B$  – произвольная фиксированная точка из  $B$  (начальное приближение), причем  $y_n \rightarrow y: Dy = y$ .

**Теорема.** Пусть  $D$  – оператор, отображающий банахово пространство  $B$  в себя, и пусть существует натуральное число  $k$  такое, что  $D^k$  – сжимающий оператор. Тогда оператор  $D$  имеет единственную неподвижную точку (т.е. такую, что  $Dy = y$ ), причем  $y$  может быть найдено методом последовательных приближений: для любого  $y_0 \in B$   $y_{n+1} = D y_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $y_n \rightarrow y$ .

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма  $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ :  $Ay \equiv \int_a^b K(x, s) y(s) ds$ , где ядро  $K(x, s)$  непрерывно по совокупности переменных  $x, s$ , но, вообще говоря, не симметрическое. Обозначим:  $\max_{x, s \in [a, b]} |K(x, s)| = K_0$ , тогда при  $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$  оператор  $\lambda A$  является сжимающим. Заметим, что  $C[a, b]$  – банахово, т.е. полное нормированное пространство.

**Теорема.** Если  $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$  (такие  $\lambda$  будем называть «малыми»), то неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$  имеет единственное решение для любой непрерывной функции  $f(x) \in C[a, b]$ , причем решение может быть найдено методом последовательных приближений.

**Следствие 1.** При  $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$  однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

**Следствие 2.** Если у оператора Фредгольма есть характеристические числа, то  $|\lambda_{\min}| \geq \frac{1}{K_0(b-a)}$ .

Если записать уравнение Фредгольма 2-го рода в операторной форме  $y = \lambda Ay + f$  или  $(I - \lambda A)y = f$ , то в случае, когда решение существует и единственно, его (решение) можно представить в виде  $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$ , где  $R_\lambda$  - интегральный оператор с непрерывным по  $x, s$  ядром  $R(x, s, \lambda)$ , т.е.  $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds$ .

Ядро  $R(x, s, \lambda)$  оператора  $R_\lambda$  называется резольвентой.

Функции  $K_1(x, s) \equiv K(x, s)$ ,  $K_n(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt$ ,  $n = 2, 3, \dots$  называются повторными (итерированными) ядрами. Так как при "малых"  $\lambda$  ( $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$ ) ряд  $\underbrace{K_1(x, s)}_{=K(x, s)} + \lambda K_2(x, s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, s) + \dots$  сходится равномерно по  $x, s \in [a, b]$ , то резольвента  $R(x, s, \lambda)$  может быть найдена по формуле  $R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$ .

В случае "малых"  $\lambda$  для оператора  $R_\lambda$  имеет место представление  $R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A^n$  - ряд Неймана.

### Примеры решения задач

**Пример 4.1.** Доказать, что сжимающий оператор является непрерывным.

**Решение.** Напомним определение сжимающего оператора. Оператор  $A$ , действующий в банаховом пространстве  $B$  называется сжимающим, если  $\exists q: 0 \leq q < 1$  такое, что  $\forall y_1, y_2 \in B: \|Ay_1 - Ay_2\| \leq q \cdot \|y_1 - y_2\|$ .

Возьмем любое  $\varepsilon > 0$  и пусть  $0 < \delta \leq \varepsilon$ , тогда для любых элементов  $y, y_0$  таких, что  $\|y - y_0\| \leq \delta$ , учитывая  $0 \leq q < 1$ , имеем:  $\|Ay - Ay_0\| \leq q \cdot \|y - y_0\| < \|y - y_0\| \leq \delta \leq \varepsilon$ . Таким образом, оператор является непрерывным, что и требовалось доказать.

**Пример 4.2.** Пусть оператор  $A$ , действующий в банаховом пространстве  $B$ , обладает свойством, что  $P = A^n$  является сжимающим оператором. Доказать, что уравнение  $y = Ay$  имеет единственное решение.

**Решение.** Так как  $P$  - сжимающий, то существует единственная неподвижная точка  $y$ :  $y = Py$  этого оператора, которая может быть найдена методом последовательных приближений, т.е. для указанного  $y$  справедливы следующие утверждения:

а) для  $\forall y_0 \in B$  последовательность  $P^k y_0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$  (неподвижной точке оператора  $P$ );

б)  $Py = y \Rightarrow P(Py) = Py = y \Rightarrow \dots \Rightarrow P^k y = y$  для любого  $k=1, 2, 3, \dots$ .

Рассмотрим  $Ay = A \underbrace{P^k y}_{=y} = A A^{nk} y = A^{nk} Ay = P^k Ay$ . Обозначив  $Ay \equiv y_0$  и продолжая

предыдущее равенство, с учетом а) получим  $Ay = P^k Ay = P^k y_0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{см. а)}} y$ , откуда следует,

что  $y = Ay$ , т.е. неподвижная точка оператора  $P$  является также и неподвижной точкой оператора  $A$ .

Для доказательства единственности неподвижной точки оператора  $A$  предположим противное, т.е. пусть существуют две точки  $\tilde{y} \neq \bar{y}$  такие что  $A\tilde{y} = \tilde{y}$  и  $A\bar{y} = \bar{y}$ , тогда  $A^n \tilde{y} \equiv P\tilde{y} = \tilde{y}$  и  $A^n \bar{y} \equiv P\bar{y} = \bar{y}$ , откуда следует, что  $\tilde{y} = \bar{y}$  в силу единственности неподвижной точки оператора  $P$ .

**Пример 4.3.** Пусть в банаховом пространстве  $B$  заданы два сжимающих оператора  $A$  и  $D$ , т.е. для любых элементов  $x, y \in B$  имеют место соотношения  $\|Ax - Ay\| \leq \alpha_A \cdot \|x - y\|$ ,  $0 \leq \alpha_A < 1$  и  $\|Dx - Dy\| \leq \alpha_D \cdot \|x - y\|$ ,  $0 \leq \alpha_D < 1$ .

Зададим некоторое число  $\varepsilon > 0$ . Назовем операторы  $A$  и  $D$   $\varepsilon$ -близкими, если для  $\forall z \in B$  выполнено  $\|Az - Dz\| \leq \varepsilon$ .

Доказать, что неподвижные точки  $x^*$  и  $y^*$  этих операторов находятся на расстоянии  $\rho(x^*, y^*) \equiv \|x^* - y^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}$ , где  $\alpha = \max\{\alpha_A, \alpha_D\} < 1$ .

**Решение.** Пусть  $x^*$  - неподвижная точка оператора  $A$ , т.е.  $x^* = Ax^*$ , а  $y^*$  - неподвижная точка оператора  $D$ :  $y^* = Dy^*$ .

Возьмем  $x^*$  в качестве начального приближения итерационного процесса для определения  $y^*$ , т.е.  $y_0 = x^*$ ,  $y_1 = Dy_0 \equiv Dx^*$ , ...,  $y_k = D^k x^*$ ;  $y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} D^k x^*$ . Тогда

$$\|x^* - y_k\| \leq \|x^* - y_1\| + \|y_1 - y_2\| + \dots + \|y_{k-1} - y_k\| \leq \|x^* - y_1\| \cdot (1 + \alpha_D + \alpha_D^2 + \dots + \alpha_D^{k-1}) \leq \frac{\|x^* - Dx^*\|}{1 - \alpha_D}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим  $\|x^* - y^*\| \leq \frac{\|x^* - Dx^*\|}{1 - \alpha_D} = \frac{\|Ax^* - Dx^*\|}{1 - \alpha_D} \leq \frac{\|Ax^* - Dx^*\|}{1 - \alpha} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}$ , что и требовалось доказать.

**Пример 4.4.** Привести пример оператора, переводящего банахово пространство  $B$  в себя, удовлетворяющего условию  $\|Ay - Az\|_B < \|y - z\|_B$  для любых  $y, z \in B$ , и не имеющего неподвижной точки.

**Решение.** Рассмотрим следующий оператор в пространстве  $R^1$ :  $Ax = x + \frac{\pi}{2} - \arctg x$ . Для любых  $y, z \in B$ , применяя формулу Лагранжа ( $\xi$  между  $y$  и  $z$ ), получим  $\|Ay - Az\|_{R^1} = |y - \arctg y - (z - \arctg z)| = |1 - \frac{1}{1 + \xi^2}| \cdot |y - z| < |y - z| \equiv \|y - z\|_{R^1}$ . Однако, для всех  $y$  имеет место неравенство  $Ay = y + \frac{\pi}{2} - \arctg y > y$ , что и означает отсутствие неподвижной точки рассматриваемого оператора.

**Замечание.** Указанный оператор не удовлетворяет теореме о неподвижной точке!!!

**Пример 4.5.** При каких  $\lambda$  оператор Фредгольма  $Ay = \lambda \int_0^1 (x-s)y(s)ds$  является

сжимающим

а) при действии  $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ;

б) при действии  $h[0,1] \rightarrow h[0,1]$ .

*Решение.*

а) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции  $y(x), z(x) \in C[0,1]$ , тогда

$$\begin{aligned} \|Ay - Az\|_{C[0,1]} &= |\lambda| \cdot \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 (x-s)[y(s) - z(s)]ds \right| \leq |\lambda| \cdot \max_{s \in [0,1]} |y(s) - z(s)| \cdot \max_{x,s \in [0,1]} |x-s| = \\ &= |\lambda| \cdot \|y - z\|_{C[0,1]}, \quad \text{т.е. оператор } A: C[0,1] \rightarrow C[0,1] \text{ является сжимающим при } |\lambda| < 1. \end{aligned}$$

б) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции  $y(x), z(x) \in h[0,1]$ , тогда

$$\begin{aligned} \|Ay - Az\|_{h[0,1]}^2 &= \lambda^2 \cdot \int_0^1 dx \left[ \int_0^1 (x-s) \cdot [y(s) - z(s)]ds \right]^2 \leq \quad (\text{неравенство Коши-Буняковского}) \\ &\leq \lambda^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 (x-s)^2 ds \cdot \int_0^1 [y(s) - z(s)]^2 ds}_{= \|y-z\|_{h[0,1]}^2} dx = \lambda^2 \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 (x-s)^2 ds dx = \lambda^2 \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2 \cdot \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

следовательно, оператор  $A: h[0,1] \rightarrow h[0,1]$  является сжимающим при условии  $|\lambda| < \sqrt{6}$ .

**Пример 4.6.** При каких  $\lambda$  оператор Вольтерра  $Bu = \lambda \int_0^x (x-s)u(s)ds$  является

сжимающим

а) при действии  $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ;

б) при действии  $h[0,1] \rightarrow h[0,1]$ .

*Решение.*

а) Рассмотрим любые две непрерывные функции  $y(x), z(x) \in C[0,1]$ , тогда

$$\begin{aligned} \|Ay - Az\|_{C[0,1]} &= |\lambda| \cdot \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \underbrace{(x-s)}_{\geq 0} [y(s) - z(s)]ds \right| \leq |\lambda| \cdot \max_{s \in [0,1]} |y(s) - z(s)| \cdot \max_{x \in [0,1]} \int_0^x (x-s)ds = \\ &= \frac{|\lambda|}{2} \cdot \|y - z\|_{C[0,1]}, \quad \text{т.е. оператор } B: C[0,1] \rightarrow C[0,1] \text{ является сжимающим при } |\lambda| < 2. \end{aligned}$$

б) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции  $y(x), z(x) \in h[0,1]$ , тогда

$$\begin{aligned} \|Ay - Az\|_{h[0,1]}^2 &= \lambda^2 \cdot \int_0^1 dx \left[ \int_0^x (x-s) \cdot [y(s) - z(s)]ds \right]^2 \leq \quad (\text{неравенство Коши-Буняковского}) \\ &\leq \lambda^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 \int_0^x (x-s)^2 ds \cdot \int_0^x [y(s) - z(s)]^2 ds}_{\leq \|y-z\|_{h[0,1]}^2} dx = \lambda^2 \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2 \cdot \int_0^1 dx \int_0^x (x-s)^2 ds = \frac{\lambda^2}{12} \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2, \end{aligned}$$

следовательно, оператор  $B: h[0,1] \rightarrow h[0,1]$  будет сжимающим при  $|\lambda| < \sqrt{12}$ .



**Пример 4.7.** Считая параметр  $\lambda$  "малым", методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)y(s)ds + \cos x. \quad \text{Сформулировать критерий "малого" } \lambda.$$

**Замечание.** Приведенный ниже способ построения резольвенты служит иллюстрацией к доказанной в курсе лекций теореме о возможности представления резольвенты  $R(x,s,\lambda)$  в виде ряда  $R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$  при "малых"  $\lambda$ . Так как ядро оператора Фредгольма в данной задаче является вырожденным, то решение уравнения может быть получено более эффективно методами, рассмотренными в примерах 6.1-6.2 (тема 6). Для построения резольвенты также могут быть использованы и другие приемы (сравните с результатом примера 6.3!!!).

**Решение.** Начнем с построения резольвенты  $R(x,s,\lambda)$ , выписав итерированные ядра:

$$K_1(x,s) \equiv K(x,s) = \sin(x+s),$$

$$K_2(x,s) = \int_0^{\pi} K(x,t)K_1(t,s)dt = \int_0^{\pi} \sin(x+t) \sin(t+s)dt = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(x-s),$$

$$K_3(x,s) = \int_0^{\pi} K(x,t)K_2(t,s)dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin(x+t) \cos(t-s)dt = \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin(x+s),$$

.....

$$K_{2m}(x,s) = \int_0^{\pi} K(x,t)K_{2m-1}(t,s)dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} \cdot \cos(x-s), \quad m=1,2,3,\dots,$$

$$K_{2m+1}(x,s) = \int_0^{\pi} K(x,t)K_{2m}(t,s)dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \cdot \sin(x+s), \quad m=1,2,3,\dots$$

Используя формулу для резольвенты  $R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$  и суммируя ряд

$$\text{отдельно по четным и нечетным номерам, найдем } R(x,s,\lambda) = \frac{\sin(x+s) + \frac{\pi\lambda}{2} \cos(x-s)}{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}.$$

Критерий "малого"  $\lambda$  в данном случае совпадает с условием сходимости ряда Неймана  $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$ , и как легко видеть, выполняется на более широком множестве значений  $\lambda$ , чем достаточное условие, сформулированное в теореме о разрешимости уравнения Фредгольма 2-го рода:  $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)} = \frac{1}{\pi}$ .

Далее, так как решение представимо в виде  $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s)ds$ , то полагая  $f(x) = \cos x$ , получим

$$y(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} R(x,s,\lambda) \cos s ds = \cos x + \frac{\frac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x + \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2 \cdot \cos x}{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2} = \frac{\cos x + \frac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x}{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}.$$

Тот же результат дает и непосредственное применение метода последовательных приближений. Положим  $y_0 \equiv 0$ ,  $y_{n+1} = \lambda A y_n + f$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , тогда

$$y_1 = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) \cdot 0 \cdot ds + \cos x = \cos x;$$

$$y_2 = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) \cos s \, ds + \cos x = \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x;$$

$$y_3 = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) \left[ \lambda \frac{\pi}{2} \sin s + \cos s \right] ds + \cos x = \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 \cos x + \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x;$$

.....

$$y_{2n+1} = \cos x \left[ 1 + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n} \right] + \sin x \cdot \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n-2} \right];$$

$$y_{2n+2} = \cos x \left[ 1 + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n} \right] + \sin x \cdot \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n} \right].$$

Легко видеть, что если  $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$ , то при  $n \rightarrow \infty$  обе подпоследовательности

сходятся к одной и той же функции  $y(x) = \frac{\cos x + \frac{\lambda \pi}{2} \cdot \sin x}{1 - \left( \frac{\pi \lambda}{2} \right)^2}$ , которая уже была

получена выше в качестве решения задачи другим способом.

*Пример 4.8.* Методом последовательных приближений решить уравнение Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_0^1 y(s) ds + 1$ . Показать, что ряд Неймана сходится лишь в области  $|\lambda| < 1$ , однако решение, полученное при этом условии, существует при всех  $\lambda \neq 1$ .

*Решение.* Решение уравнения Фредгольма  $y = \lambda A y + f$  может быть записано в виде ряда Неймана  $y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x)$ .

В нашем случае  $Af(x) = \int_0^1 f(x) dx$ ,  $f(x) = 1$ , поэтому  $Af(x) = \int_0^1 1 \cdot dx = 1$  и, аналогично,  $A^n f(x) = 1$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Следовательно, при условии  $|\lambda| < 1$ , ряд Неймана  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$  сходится, и решением уравнения является функция  $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$ , однако если  $|\lambda| \geq 1$ , то ряд расходится, и справедливость полученной формулы оказывается под сомнением.

С другой стороны, обозначив  $\int_0^1 y(s) ds = C$ , будем иметь  $y(x) = \lambda C + 1$ , откуда  $C = \int_0^1 (\lambda C + 1) ds = \lambda C + 1$ . Поэтому, при  $\lambda = 1$  уравнение неразрешимо, а для остальных  $\lambda \neq 1$  находим  $C = \frac{1}{1-\lambda}$  и  $y(x) = 1 + \lambda C = 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}$ .

Итак, решение задачи существует при всех  $\lambda \neq 1$  и дается формулой  $y(x) = \frac{1}{1-\lambda}$ , что совпадает с выражением, полученным ранее лишь на множестве  $|\lambda| < 1$ . Заметим, что при условии  $|\lambda| > 1$  решение также существует, несмотря на то, что ряд Неймана расходится.

### Задачи для самостоятельного решения

- 4.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве  $C[a, b]$ , не имеет характеристических чисел на интервале

$$\lambda \in \left( 0, \frac{1}{K_0(b-a)} \right), \quad \text{где } K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|.$$

- 4.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве  $h[a, b]$ , не имеет характеристических чисел на интервале

$$\lambda \in \left( 0, \frac{1}{K_0(b-a)} \right), \quad \text{где } K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|.$$

- 4.3 Доказать, что задача решения уравнения Фредгольма 2-рода  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x)$  с

вещественным непрерывным ядром корректно поставлена при условии  $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$ , где

$$K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|$$

- а) в пространстве  $C[a, b]$ ;  
б) в пространстве  $h[a, b]$ .

- 4.4 Доказать, что оператор Фредгольма  $y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x s^2 y(s) ds + 1$  является сжимающим в пространстве  $C[0, 1]$ , и найти его неподвижную точку.

- 4.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма 2-го рода:

а)  $y(x) = \lambda \int_0^1 x s y(s) ds + x$ ;

б)  $y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} y(s) ds + 1 + x^2$ ;

в)  $y(x) = \lambda \int_0^1 y(s) ds + \sin \pi x$ ;

$$\text{г) } y(x) = \lambda \int_0^{\pi} x \sin 2s y(s) ds + \cos 2x;$$

$$\text{д) } y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+s) y(s) ds + 2;$$

$$\text{е) } y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos s y(s) ds + 1 \quad (\lambda = 1);$$

$$\text{ж) } y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x e^s \cdot y(s) ds + e^{-x} \quad (\lambda = \frac{1}{2});$$

$$\text{з) } y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} y(s) ds + x \quad (\lambda = 1).$$

В случаях а) - д) сформулировать критерий "малого"  $\lambda$ ; в примерах е) - з) проверить выполнение соответствующего условия.

### Ответы к задачам

$$4.4 \quad y = \frac{4}{21}x + 1.$$

4.5 а) Резольвента  $R(x, s, \lambda) = \frac{3xs}{3-\lambda}$ , решение  $y(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$ ; условие сходимости последовательных приближений  $|\lambda| < 3$ , достаточное условие теоремы выполнено при  $|\lambda| < 1$ .

$$\text{б) Резольвента } R(x, s, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda \frac{\ln 2}{2}} \cdot \frac{x}{1+s^2}, \text{ решение } y(x) = 1 + \frac{\lambda x}{1-\lambda \frac{\ln 2}{2}} + x^2;$$

условие сходимости последовательных приближений  $|\lambda| < \frac{2}{\ln 2}$ , достаточное условие теоремы выполнено лишь при  $|\lambda| < 1$ .

в) Резольвента  $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda}$ , решение  $y(x) = \sin \pi x + \frac{2\lambda}{\pi(1-\lambda)}$ ; условие сходимости последовательных приближений  $|\lambda| < 1$  совпадает с достаточным условием теоремы.

$$\text{г) Резольвента } R(x, s, \lambda) = \frac{x \cdot \sin 2s}{1 + \frac{\lambda \pi}{2}}, \text{ решение } y(x) = \cos 2x; \text{ последовательные}$$

приближения сходятся при  $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$ , достаточное условие теоремы выполнено только для

$$|\lambda| < \frac{1}{\pi^2}.$$

д) Резольвента  $R(x, s, \lambda) = \frac{\sin(x+s) + \lambda \pi \cos(x-s)}{1 - \lambda^2 \pi^2}$ , решение  $y(x) = 2$ ;

последовательные приближения сходятся при  $|\lambda| < \frac{1}{\pi}$ , достаточное условие теоремы выполнено только при  $|\lambda| < \frac{1}{2\pi}$ .

е) Резольвента  $R(x, s, \lambda) = \frac{2 \sin x \cdot \cos s}{2 - \lambda}$ , решение  $y(x) = 1 + 2 \sin x$ ;

последовательные приближения сходятся при  $|\lambda| < 2$ , однако достаточное условие "малого"  $\lambda$ :  $|\lambda| = 1 < \frac{2}{\pi}$ , сформулированное в теореме, - не выполнено.

ж) Резольвента  $R(x, s, \lambda) = \frac{x e^s}{1 - \lambda}$ , решение  $y(x) = x + e^{-x}$ ; последовательные

приближения сходятся при  $|\lambda| < 1$ , однако достаточное условие теоремы  $|\lambda| = \frac{1}{2} < \frac{1}{e}$  не выполняется.

з) Резольвента  $R(x, s, \lambda) = \frac{2}{2 - \lambda}$ , решение  $y(x) = x + \frac{1}{4}$ ; последовательные

приближения сходятся при  $|\lambda| < 2$ , достаточное условие теоремы  $|\lambda| = 1 < 2$  также выполняется.

## ТЕМА 5

### *Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода.*

#### Основные определения и теоремы.

Уравнение  $y = \lambda \int_a^x K(x,s) y(s) ds + f(x)$ ,  $x, s \in [a, b]$ , или в операторной форме  $y = \lambda B y + f$ , называется уравнением Вольтерра 2-го рода.

Пусть ядро  $K(x,s)$  непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения  $\Delta = \{x, s : a \leq s \leq x \leq b\}$  и не равно нулю тождественно,  $f(x)$  – непрерывная на  $[a, b]$  функция.

**Теорема.** Уравнение Вольтерра 2-го рода при любом значении  $\lambda$  имеет единственное решение для любой непрерывной функции  $f(x)$ . Это решение может быть найдено методом последовательных приближений  $y_{n+1} = \lambda B y_n + f$ ,  $\forall y_0 \in C[a, b]$ ,  $f(x) \in C[a, b]$ .

*Следствие 1.* При любом  $\lambda$  однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

*Следствие 2.* Оператор Вольтерра, действующий  $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , не имеет характеристических чисел. Таким образом, оператор Вольтерра является примером вполне непрерывного оператора, не имеющего ни одного характеристического числа.

Метод последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода называется методом Пикара и выглядит так: для любого начального приближения

$y_0 \in C[a, b]$  определим  $y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x,s) y_n(s) ds + f(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , или

$y_{n+1} = \lambda B y_n + f$ , причем  $y_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x)$ .

Полагая  $y_0 = 0$ , получаем ряд Неймана  $y = f + \lambda B f + \lambda^2 B^2 f + \dots + \lambda^n B^n f + \dots$ .

Если записать уравнение Вольтерра 2-го рода в операторной форме  $y = \lambda A y + f$  или  $(I - \lambda A)y = f$ , то так как решение существует и единственно при любой непрерывной функции  $f(x)$  и любом  $\lambda$ , его (решение) можно представить в виде  $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$ , где  $R_\lambda$  – интегральный оператор с непрерывным по  $x, s$  ядром  $R(x, s, \lambda)$ , т.е.  $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds$ .

Ядро  $R(x, s, \lambda)$  оператора  $R_\lambda$  называется резольвентой.

Функции  $K_1(x, s) \equiv K(x, s)$ ,  $K_n(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt$ ,  $n = 2, 3, \dots$  называются повторными (итерированными) ядрами. Ряд  $\underbrace{K_1(x, s)}_{=K(x, s)} + \lambda K_2(x, s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, s) + \dots$  сходится равномерно по  $x, s \in [a, b]$  при любых  $\lambda$ , в отличие от аналогичного ряда для

уравнения Фредгольма, сходимость которого гарантировалась лишь при  $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$ , и

резольвента  $R(x, s, \lambda)$  может быть получена по формуле  $R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$ .

Уравнения Вольтерра с ядрами специального вида могут также решаться путем сведения к дифференциальному уравнению, либо с использованием преобразования Лапласа (примеры 5.4 и 5.5).

### Примеры решения задач.

*Пример 5.1.* Методом последовательных приближений построить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода  $y(x) = \lambda \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds + x e^{\frac{x^2}{2}}$  и найти решение этого уравнения при  $\lambda = 1$ .

*Решение.* Вычислим повторные ядра этого уравнения:  $K_1(x, s) = K(x, s) = e^{-(x-s)}$ ,

$$K_2(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_1(t, s) dt = \int_s^x e^{-(x-t)} e^{-(t-s)} dt = (x-s) \cdot e^{-(x-s)},$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_2(t, s) dt = \int_s^x e^{-(x-t)} \cdot (t-s) e^{-(t-s)} dt = \frac{(x-s)^2}{2} \cdot e^{-(x-s)},$$

.....

$$K_{m+1}(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_m(t, s) dt = \frac{(x-s)^m}{m!} \cdot e^{-(x-s)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для резольвенты, получим  $R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) = e^{-(x-s)} \cdot e^{\lambda(x-s)} = e^{(\lambda-1)(x-s)}$ . Заметим, что ряд сходится при любых  $\lambda$ , что обеспечивается не малостью  $\lambda$ , как было в случае уравнения Фредгольма, а наличием множителя  $m!$  в знаменателях повторных ядер.

Далее, положив  $\lambda = 1$ , получим  $R(x, s, \lambda) = R(x, s, 1) = 1$  и запишем решение уравнения при  $f(x) = x e^{\frac{x^2}{2}}$  в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds = x e^{\frac{x^2}{2}} + 1 \cdot \int_0^x s e^{\frac{s^2}{2}} ds = (x+1) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

*Пример 5.2.* Методом последовательных приближений решить уравнение Вольтерра

$$y(x) = \int_0^x (s-x) y(s) ds + 1.$$

*Решение.* Итерационный процесс для данного уравнения выглядит так:

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (s-x) y_n(s) ds + 1. \text{ Выберем в качестве начального приближения } y_0(x) \equiv 0, \text{ тогда}$$

последовательно найдем:

$$y_1(x) = \int_0^x (s-x) \cdot 0 \, ds + 1 = 1,$$

$$y_2(x) = \int_0^x (s-x) y_1(s) \, ds + 1 = \int_0^x (s-x) \cdot 1 \, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (s-x) y_2(s) \, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

.....

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (s-x) y_n(s) \, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим функцию  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \cos x$ , которая и является решением рассматриваемого уравнения.

*Пример 5.3.* Доказать, что если ядро уравнения Вольтерра  $y(x) = \lambda \int_0^x K(x,s) y(s) \, ds + f(x)$

зависит только от разности аргументов, т.е.  $K(x,s) = K(x-s)$ , то все повторные ядра, а следовательно и резольвента, также являются функциями лишь от разности  $(x-s)$ .

*Решение.* Пусть  $K(x,s) = K(x-s)$ , тогда  $K_2(x,s) = \int_s^x K(x-t) K(t-s) \, dt$ . Произведя замену переменной интегрирования по формуле  $t-s = \xi$ , получим

$$K_2(x,s) = \int_0^{x-s} K(x-s-\xi) K(\xi) \, d\xi = \int_0^{x-s} F_2(x-s, \xi) \, d\xi = \Phi_2(x-s).$$

Действуя далее аналогичным путем, найдем,

$$K_m(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_{m-1}(t,s) \, dt = \int_s^x K(x-t) K_{m-1}(t-s) \, dt = \int_0^{x-s} K(x-s-\xi) K_{m-1}(\xi) \, d\xi = \Phi_m(x-s),$$

что и требовалось доказать.

*Пример 5.4.* С помощью преобразования Лапласа найти резольвенту и записать решение

$$\text{уравнения Вольтерра } y(x) = \int_0^x \sin(x-s) y(s) \, ds + f(x).$$

*Решение.* Поставим в соответствие функциям, входящим в уравнение, их изображения:

$$y(x) \div Y(p), \quad f(x) \div F(p), \quad \sin x \div \frac{1}{p^2 + 1} \equiv K(p).$$

Учитывая, что изображение свертки двух функций есть произведение их изображений, получим  $Y(p) = K(p) \cdot Y(p) + F(p)$ , откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)} = F(p) + \frac{K(p)}{1 - K(p)} \cdot F(p).$$

Используя результат предыдущей задачи, можно сделать вывод, что резольвента зависит лишь от разности  $(x-s)$ , следовательно, решение исходного уравнения

представимо в виде  $y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-s, 1) f(s) \, ds$ . Сравнивая последние две формулы,



легко видеть, что изображение искомой резольвенты есть  $\tilde{R}(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p)}$ . Подставив сюда

$$K(p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \text{ получим } \tilde{R}(p) = \frac{1}{p^2}, \text{ откуда найдем } R(x, s, 1) = R(x - s, 1) = x - s.$$

Решение уравнения теперь можно записать так:  $y(x) = f(x) + \int_0^x (x - s) f(s) ds$ .

**Пример 5.5.** Решить интегральное уравнение Вольтерра  $y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x - s) y(s) ds$ ,

сведя его к задаче Коши для дифференциального уравнения.

*Решение.* Легко видеть, что решение уравнения удовлетворяет условию  $y(0) = 0$ .

Последовательно продифференцируем интегральное уравнение и найдем

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - s) y(s) ds + \sin(x - x) y(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - s) y(s) ds, \quad y'(0) = 1,$$

$$y''(x) = -\sin x - \int_0^x \sin(x - s) y(s) ds + \cos(x - x) y(x) = -\sin x + y(x) - \int_0^x \sin(x - s) y(s) ds.$$

Складывая последнее равенство с исходным, получим  $y'' = 0$ . Решение задачи Коши с начальными условиями  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  дает  $y(x) = x$ .

*Замечание.* Этот же результат можно получить, используя формулу решения предыдущего примера, полагая в ней  $f(x) = \sin x$ :

$$y(x) = \sin x + \int_0^x (x - s) \sin s ds = \sin x + x - \sin x = x.$$

### Задачи для самостоятельного решения.

- 5.1 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в  $C[a, b]$ , не имеет характеристических чисел.
- 5.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в  $h[a, b]$ , не имеет характеристических чисел.
- 5.3 Доказать, что задача решения уравнения Вольтерра 2-рода  $y(x) = \int_a^x K(x, s) y(s) ds + f(x)$  корректно поставлена
  - а) в пространстве  $C[a, b]$ ;
  - б) в пространстве  $h[a, b]$ .
- 5.4 Решить интегральное уравнение, сведя его к задаче Коши:
  - а)  $y(x) = e^x + \int_0^x y(s) ds$ ;
  - б)  $y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x - s) y(s) ds$ ;
  - в)  $y(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{-s} y(x - s) ds$  (Указание: сделать в интеграле замену переменной  $x - s = \xi$ ).

5.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение интегрального уравнения:

а)  $y(x) = 1 + \int_0^x s y(s) ds$  ;

б)  $y(x) = x - \int_0^x (x-s) y(s) ds$  ;

в)  $y(x) = x + \frac{x^2}{2} - \int_0^x y(s) ds$  .

5.6 Решить интегральное уравнение, используя преобразование Лапласа:

а)  $y(x) = x - \int_0^x e^{x-s} y(s) ds$  ;

б)  $y(x) = \cos x - \int_0^x (x-s) \cos(x-s) y(s) ds$  ;

в)  $y(x) = 2 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-s)^3 y(s) ds$  .

5.7 Решить уравнение Вольтерра 1-го рода  $\int_0^x e^{x-s} y(s) ds = \sin x$

а) применив преобразование Лапласа;

б) продифференцировав уравнение и сведя его к уравнению Вольтерра 2-го рода.

### Ответы к задачам.

5.4 а)  $y' - y = e^x$ ,  $y(0) = 1$ ;  $y(x) = (x+1) \cdot e^x$ ;  
 б)  $y'' + y = 4e^x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 7$ ;  $y(x) = 2e^x - 2\cos x + 5\sin x$ ;  
 в)  $y' - y = \sin x + \cos x$ ,  $y(0) = 0$ ;  $y(x) = e^x - \cos x$ .

5.5 а)  $R(x, s, \lambda) = se^{\lambda \frac{x^2-s^2}{2}}$ ,  $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ ;  
 б)  $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(s-x)$ ,  $y(x) = \sin x$ ;  
 в)  $R(x, s, \lambda) = e^{\lambda(x-s)}$ ,  $y(x) = x$ .

5.6 а)  $y(x) = x - \frac{x^2}{2}$ ;  
 б)  $y(x) = \frac{2}{3} \cos x \sqrt{3} + \frac{1}{3}$ ;  
 в)  $y(x) = \cos x + ch x$ .

5.7  $y(x) = \cos x - \sin x$

## ТЕМА 6

### ***Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода. Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма.***

#### **Основные определения и теоремы**

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$ .

Сопряженным (союзным) интегральным уравнением называется уравнение с ядром  $K^*(x, s) = K(s, x)$ . Если ядро симметрическое, то союзное уравнение совпадает с исходным.

Наряду с уравнением  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$  или, в операторной форме  $y = \lambda Ay + f$ , будем рассматривать союзное с ним интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x, s) \psi(s) ds + g(x)$$

(в операторной форме  $\Leftrightarrow \psi = \lambda A^* \psi + g$ ),  $g(x)$  - непрерывная функция.

Сформулируем **4 теоремы Фредгольма**.

**Теорема 1.** Однородное уравнение

$$(1) \quad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$(2) \quad \psi(x) - \lambda \int_a^b K^*(x, s) \psi(s) ds = 0$$

( $K^*(x, s) = K(s, x)$ ) при любом фиксированном  $\lambda$  имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ;  $\psi_1, \dots, \psi_n$ .

В курсе лекций теорема была доказана для интегральных уравнений с вырожденными и симметрическими ядрами.

**Теорема 2.** Для разрешимости неоднородного уравнения

$$(3) \quad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы  $f(x)$  была ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения (2) ( $f(x) \perp \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , если  $\lambda$  - характеристическое число).

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

**Теорема 3 (альтернатива Фредгольма).**

Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо при любой неоднородности - непрерывной функции  $f(x)$ , либо однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

**Теорема 4.** Множество характеристических чисел однородного уравнения (1) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой  $\infty$ .

Этот результат справедлив для любого вполне непрерывного оператора. В курсе лекций он был получен для вполне непрерывных самосопряженных операторов и, тем самым, доказан для случая симметрических ядер. Для интегральных операторов с вырожденными ядрами результат тривиален.

*Замечание.* В курсе лекций теоремы Фредгольма были доказаны для уравнений с симметрическими непрерывными ядрами и уравнений с непрерывными вырожденными ядрами. Они справедливы и для общего случая произвольного непрерывного ядра, так как имеет место следующая

**Теорема.** Интегральное уравнение Фредгольма 2 рода  $y = \lambda Ay + f$  с невырожденным ядром при фиксированном  $\lambda$  можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Опишем процедуру решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x) \equiv \lambda Ay + f$  в случаях вырожденного ядра и симметричного ядра.

Напомним, что ядро  $K(x,s)$  интегрального оператора Фредгольма называется вырожденным, если оно представимо в виде  $K(x,s) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$ , где функции  $a_j(x)$ ,  $b_j(s)$ ,  $j=1,2,\dots,n$  непрерывны по своим аргументам на  $[a,b]$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  – линейно независимы, и  $b_1(s), \dots, b_n(s)$  – также линейно независимы.

Рассмотрим уравнения Фредгольма 2 рода  $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x)$  с вырожденным ядром  $K(x,s) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$ , где  $f(x)$  – заданная непрерывная функция.

Обозначив  $c_j = \int_a^b b_j(s) y(s) ds$ , будем иметь  $y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(x) + f(x)$ . Для нахождения  $c_j$  получим эквивалентную систему алгебраических уравнений

$$c_i = \int_a^b y(x) b_i(x) dx = \lambda \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x) b_i(x) dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int_a^b f(x) b_i(x) dx}_{f_i}, \text{ или } c_i - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ij} c_j = f_i, \quad i=1,\dots,n.$$

Обозначим определитель этой системы  $D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix}.$

**Теорема.** Если  $\lambda$  не является характеристическим числом (т.е.  $D(\lambda) \neq 0$ ), то интегральное уравнение Фредгольма 2 рода имеет решение при любой непрерывной неоднородности  $f(x)$ , причем это решение единственно для каждой функции  $f(x)$ .

Решение алгебраической системы для  $c_j$  в этом случае может быть найдено, например, по формулам Крамера:  $c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^n D_{ki}(\lambda) f_k$ , где  $D_{ki}(\lambda)$  – алгебраические

дополнения  $i$ -го столбца определителя  $D(\lambda)$  ( $D(\lambda)$  и  $D_{ki}(\lambda)$  называются определителями Фредгольма). Подставляя  $c_j$  в формулу  $y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(x) + f(x)$ , получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^n D_{ki}(\lambda) a_i(x) \int_a^b f(s) b_k(s) ds,$$

или  $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds$ , где  $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ki}(\lambda) a_i(x) b_k(s)$  – резольвента интегрального оператора.

Теперь рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в случае симметрического ядра.

Пусть ядро  $K(x, s)$  непрерывно по совокупности переменных, симметрическое и  $K(x, s) \not\equiv 0$ ;  $\lambda$  – вещественное число;  $f(x)$  – заданная непрерывная функция. Пусть  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$  – последовательность характеристических чисел интегрального оператора, которым соответствует ортонормированная система собственных функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  (каждое характеристическое число повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность!!!).

Возможны два случая:

а)  $\lambda \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots$  Тогда решение можно записать в следующем виде

$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k \varphi_k(x)$ , где  $f_k = \int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds$  – коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  по ортонормированной системе собственных функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ , или

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} \right)}_{R(x, s, \lambda)} f(s) ds = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds,$$

где  $R(x, s, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}$  – резольвента интегрального оператора Фредгольма.

б)  $\lambda = \lambda_{k_0}$ , где  $\lambda_{k_0}$  – характеристическое число интегрального оператора, имеющее кратность  $r$ , т.е. ему отвечают  $r$  ортонормированных собственных функций  $\varphi_{k_0}(x), \dots, \varphi_{k_0+r-1}(x)$ . В этом случае решение не единственно и определяется формулой

$$y(x) = f(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0 \\ \dots \\ k \neq k_0+r-1}}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + c_{k_0} \varphi_{k_0}(x) + \dots + c_{k_0+r-1} \varphi_{k_0+r-1}(x),$$

где  $c_{k_0}, \dots, c_{k_0+r-1}$  – произвольные константы, причем решение существует при условии ортогональности  $f(x)$  всем собственным функциям  $\varphi_{k_0}(x), \dots, \varphi_{k_0+r-1}(x)$ , соответствующим характеристическому числу  $\lambda_{k_0}$ . Бесконечный ряд, записанный в данном выражении, сходится абсолютно и равномерно.

Заметим, что решения отличаются одно от другого на функции, являющиеся элементами  $\text{Ker}(I - \lambda A)$  (нуль-пространства) оператора  $I - \lambda A$ .

**Теорема.** А) Если однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром имеет только тривиальное решение (т.е.  $\lambda \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ ), то

неоднородное уравнение имеет единственное решение для любой непрерывной функции  $f(x)$ .

Б) Если же однородное уравнение имеет нетривиальные решения (т.е.  $\lambda = \lambda_k$  — совпадает с одним из характеристических чисел), то неоднородное уравнение разрешимо в том и только том случае, когда неоднородность — непрерывная функция  $f(x)$  — ортогональна всем собственным функциям, соответствующим данному  $\lambda$  (ортогональна всем решениям однородного уравнения).

В) В последнем случае, если решение есть, то оно не единственно.

**Теорема.** (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическими ядрами):

Либо неоднородное уравнение имеет решение при любой непрерывной функции  $f(x)$ , либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

### Примеры решения задач

*Пример 6.1.* Показать, что характеристические числа однородного уравнения Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 + sx)y(s)ds$  и соответствующего однородного союзного уравнения  $z(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 + sx)z(s)ds$  совпадают, и при этих  $\lambda$  указанные уравнения имеют одинаковое число линейно независимых решений.

*Решение.* Обозначим  $\int_{-1}^1 s^2 y(s) ds = a_1$ ,  $\int_{-1}^1 s y(s) ds = a_2$ ,  $\int_{-1}^1 z(s) ds = b_1$ ,  $\int_{-1}^1 s z(s) ds = b_2$ . Тогда решения указанных уравнений примут вид  $y(x) = \lambda a_1 + \lambda a_2 x$ ,  $z(x) = \lambda b_1 x^2 + \lambda b_2 x$ , и для определения коэффициентов получим

$$a_1 = \lambda \int_{-1}^1 s^2 (a_1 + a_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} a_1, \quad a_2 = \lambda \int_{-1}^1 s (a_1 + a_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} a_2,$$

$$b_1 = \lambda \int_{-1}^1 (b_1 s^2 + b_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} b_1, \quad b_2 = \lambda \int_0^1 s (b_1 s^2 + b_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} b_2.$$

Итак, при  $\lambda \neq \frac{3}{2}$  имеем  $a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$ ,  $b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow z(x) \equiv 0$ ; при  $\lambda = \frac{3}{2}$

$a_2, a_1, b_1, b_2$  остаются произвольными. Поэтому  $\lambda = \frac{3}{2}$  является характеристическим числом для обоих рассматриваемых уравнений, и при этом  $\lambda$  они имеют по два линейно независимых решения:  $y_1(x) = 1$ ,  $y_2(x) = x$  и  $z_1(x) = x$ ,  $z_2(x) = x^2$ .

**Пример 6.2.** Для каждого  $\lambda$  исследовать разрешимость и построить решение неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным несимметрическим ядром  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 - sx)y(s)ds + x^3$ .

**Решение.** Рассмотрим соответствующее однородное уравнение  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 - sx)y(s)ds$ .

Обозначим  $\int_{-1}^1 s^2 y(s)ds = a_1$ ,  $\int_{-1}^1 s y(s)ds = a_2$ , тогда решение его имеет вид  $y(x) = \lambda a_1 - \lambda a_2 x$ ,

где  $a_1 = \lambda \int_{-1}^1 s^2 (a_1 - a_2 s)ds = \frac{2\lambda}{3} a_1$ ,  $a_2 = \lambda \int_{-1}^1 s (a_1 - a_2 s)ds = -\frac{2\lambda}{3} a_2$ . Итак, при  $\lambda \neq \pm \frac{3}{2}$

$a_1 = a_2 = 0$ , однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а значит исходное неоднородное уравнение имеет единственное решение.

При  $\lambda = \pm \frac{3}{2}$  (характеристические числа) однородное уравнение имеет нетривиальные решения: если  $\lambda = +\frac{3}{2}$ , то  $y_1(x) = C$ , если  $\lambda = -\frac{3}{2}$ , то  $y_2(x) = Cx$ . Поэтому, для указанных значений  $\lambda$  вопрос о разрешимости неоднородного уравнения сводится к проверке ортогональности функции  $f(x) = x^3$  собственным функциям однородного союзного уравнения  $z(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - sx)z(s)ds$ .

Найдем собственные функции однородного союзного уравнения. Обозначим  $\int_{-1}^1 z(s)ds = b_1$ ,  $\int_{-1}^1 s z(s)ds = b_2$ , тогда решение его имеет вид  $z(x) = \lambda b_1 x^2 - \lambda b_2 x$ , где

$$b_1 = \lambda \int_{-1}^1 (b_1 s^2 - b_2 s)ds = \frac{2\lambda}{3} b_1, \quad b_2 = \lambda \int_{-1}^1 s (b_1 s^2 - b_2 s)ds = -\frac{2\lambda}{3} b_2.$$

При  $\lambda = +\frac{3}{2}$  получаем  $b_2 = 0$ ,  $b_1$  - произвольно, откуда  $z_1(x) \equiv Cx^2$  и  $\int_{-1}^1 f(x) \cdot z_1(x)dx = C \int_{-1}^1 x^3 \cdot x^2 dx = 0$ , т.е. исследуемое уравнение разрешимо и решение его не единственно;

при  $\lambda = -\frac{3}{2}$  имеем  $b_1 = 0$ ,  $b_2$  - произвольно, откуда  $z_2(x) \equiv Cx$  и  $\int_{-1}^1 f(x) \cdot z_2(x)dx = C \int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx \neq 0$ , т.е. у исследуемого неоднородного уравнения решений нет.

Чтобы решить уравнения  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 - sx)y(s)ds + x^3$  снова обозначим

$\int_{-1}^1 s^2 y(s)ds = a_1$ ,  $\int_{-1}^1 s y(s)ds = a_2$ , тогда решение представимо в виде  $y(x) = \lambda a_1 - \lambda a_2 x + x^3$ ,

$$\text{где } a_1 = \int_{-1}^1 s^2 (\lambda a_1 - \lambda a_2 s + s^3)ds = \frac{2\lambda}{3} a_1, \quad a_2 = \int_{-1}^1 s (\lambda a_1 - \lambda a_2 s + s^3)ds = -\frac{2\lambda}{3} a_2 + \frac{2}{5}.$$

При  $\lambda = -\frac{3}{2}$  имеем  $a_1 = 0$ ,  $0 \cdot a_2 = \frac{2}{5}$ , следовательно, решений нет, как и было установлено ранее;

при  $\lambda = +\frac{3}{2}$  получим  $a_2 = \frac{1}{5}$ ,  $a_1 = C$  - произвольная постоянная, поэтому  $y(x) \equiv C + \frac{3}{10}x + x^3$ , т.е. решение не единственно, и определяется с точностью до собственной функции ядра  $y_1(x) = C$ , отвечающей  $\lambda = +\frac{3}{2}$ .

Если  $\lambda \neq \pm \frac{3}{2}$ , то  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{6}{5(3+2\lambda)}$ , и единственное решение дается формулой  $y(x) = \frac{6x}{5(3+2\lambda)} + x^3$ .

**Пример 6.3.** Построить резольвенту уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) y(s) ds + f(x)$$

- а) вычислив определители Фредгольма;
- б) в виде разложения по собственным функциям однородного уравнения.

*Решение.*

а) Ядро исследуемого оператора  $K(x, s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$  является вырожденным. Обозначим  $a_1(x) = \sin x$ ,  $a_2(x) = \cos x$ ,  $b_1(s) = \cos s$ ,  $b_2(s) = \sin s$  и найдем элементы определителей Фредгольма  $k_{ij} = \int_a^b a_j(x) b_i(x) dx$ :

$$k_{11} = \int_0^{\pi} a_1(x) b_1(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0, \quad k_{12} = \int_0^{\pi} a_2(x) b_1(x) dx = \int_0^{\pi} \cos x \cos x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$k_{21} = \int_0^{\pi} a_1(x) b_2(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x \sin x dx = \frac{\pi}{2}, \quad k_{22} = \int_0^{\pi} a_2(x) b_2(x) dx = \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = 0.$$

Вычислим определители Фредгольма:  $D_{11}(\lambda) = 1$ ,  $D_{12}(\lambda) = D_{21}(\lambda) = \lambda \frac{\pi}{2}$ ,  $D_{22}(\lambda) = 1$ ,

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \frac{\pi}{2} \\ -\lambda \frac{\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left( \lambda \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Искомая резольвента  $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ki}(\lambda) a_i(x) b_k(s)$  в случае  $D(\lambda) \neq 0$ ,

т.е.  $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$ , примет вид  $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 D_{ki}(\lambda) a_i(x) b_k(s) =$

$$= \frac{1 \cdot \sin x \cos s + \lambda \frac{\pi}{2} \cdot \sin x \sin s + \lambda \frac{\pi}{2} \cdot \cos x \cos s + 1 \cdot \cos x \sin s}{1 - \left( \lambda \frac{\pi}{2} \right)^2} = \frac{\sin(x+s) + \lambda \frac{\pi}{2} \cos(x-s)}{1 - \left( \lambda \frac{\pi}{2} \right)^2}.$$



б) Характеристические числа и собственные функции однородного уравнения  $y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) y(s) ds$  были получены в примере 3.8:  $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$  и нормированная

собственная функция  $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x)$ ,  $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$  и нормированная собственная

функция  $y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x)$ . Подставляя их в формулу для резольвенты в случае

симметрического непрерывного ядра  $R(x, s, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}$ , имеем

$$R(x, s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin s + \cos s)}{\frac{2}{\pi} - \lambda} + \frac{1}{\pi} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin s - \cos s)}{-\frac{2}{\pi} - \lambda} = \frac{\sin(x+s) + \lambda \frac{\pi}{2} \cos(x-s)}{1 - \left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Заметим, что этот же результат был получен ранее методом последовательных приближений для "малого"  $\lambda$  (см. пример 4.7).

*Пример 6.4.* Решить уравнение  $y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin s + s) y(s) ds + \sin 2x$ .

*Решение.* Обозначим  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin s y(s) ds = C_1$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} s y(s) ds = C_2$ , тогда решение примет вид

$y(x) = \frac{1}{\pi} (C_1 \sin x + C_2) + \sin 2x$ . Постоянные  $C_1, C_2$  могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \left( \frac{C_1}{\pi} \sin s + \frac{C_2}{\pi} + \sin 2s \right) ds = C_1 \\ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot \left( \frac{C_1}{\pi} \sin s + \frac{C_2}{\pi} + \sin 2s \right) ds = 2C_1 - \pi \end{cases}.$$

Итак,  $C_1 = C$  - остается произвольным,  $C_2 = 2C - \pi$ , и искомое решение определяется неоднозначно:  $y(x) = \sin 2x - 1 + \frac{C}{\pi}(\sin x + 2)$ .

*Замечание.* В рассматриваемом случае  $\lambda = \frac{1}{\pi}$  совпадает с характеристическим числом

однородного уравнения  $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin s + s) y(s) ds$ . Поэтому решение неоднородного

уравнения оказалось не единственным, и определилось с точностью до собственной функции соответствующего однородного уравнения, отвечающей характеристическому числу  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$ .

Действительно, используя введенные выше обозначения, решение однородного уравнения представим в виде  $y(x) = \lambda(C_1 \sin x + C_2)$ . Постоянные  $C_1, C_2$  найдем из системы

$$\begin{cases} C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \lambda (C_1 \sin s + C_2) ds = \lambda \pi C_1 \\ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot \lambda (C_1 \sin s + C_2) ds = 2\pi \lambda C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(1 - \lambda \pi) = 0 \\ C_1 2\lambda \pi - C_2 = 0 \end{cases}$$

нетривиальное решение которой  $C_1 = C$ ,  $C_2 = 2C$  существует при  $\lambda = \frac{1}{\pi}$ .

Таким образом,  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$  - характеристическое число, а  $y_0(x) = \tilde{C}(\sin x + 2)$  - отвечающие ему собственные функции.

Рекомендуем самостоятельно найти собственные функции однородного союзного уравнения  $z(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin s + x) z(s) ds$  и убедиться в выполнении условия разрешимости, т.е. ортогональности неоднородности  $f(x) = \sin 2x$  всем собственным функциям однородного союзного уравнения, отвечающим характеристическому числу  $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$ .

*Пример 6.5.* Решить уравнение  $y(x) = 2 \int_0^1 \sqrt{xs} y(s) ds + x$ .

*Решение.* Обозначим  $C = \int_0^1 \sqrt{s} y(s) ds$ , тогда решение, если оно существует, можно записать в виде  $y(x) = 2C\sqrt{x} + x$ . Подставляя это выражение в предыдущую формулу, для определения постоянной  $C$  получим уравнение  $C = \int_0^1 \sqrt{s} \cdot (2C\sqrt{s} + s) ds = C + \frac{2}{5}$ , которое решений не имеет. Поэтому исследуемое интегральное уравнение Фредгольма  $y(x) = 2 \int_0^1 \sqrt{xs} y(s) ds + x$  решений также не имеет.

*Замечание.* Элементарно устанавливается, что  $\lambda_0 = 2$  является характеристическим числом однородного уравнения Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xs} y(s) ds$  с собственной функцией  $y_0(x) = C\sqrt{x}$ . Так как ядро симметрическое, то  $\lambda_0 = 2$  является также характеристическим числом однородного союзного уравнения с той же собственной функцией  $z_0(x) = C\sqrt{x}$ .

В рассматриваемом случае имеем  $\lambda = 2 = \lambda_0$ , т.е.  $\lambda$  совпадает с характеристическим числом однородного уравнения. При этом условие разрешимости (ортогональность неоднородности  $f(x) = x$  всем собственным функциям однородного союзного уравнения) не выполнено.

**Пример 6.6.** Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) y(s) ds + f(x) \quad \text{с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром}$$

$$K(x, s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s \\ s(1-x), & s \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad x, s \in [0; 1].$$

1) При  $\lambda \neq \lambda_n$ , где  $\lambda_n = n^2 \pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) - собственные значения исследуемого интегрального оператора Фредгольма (см. пример 7.7), построить резольвенту интегрального оператора и записать решение неоднородного уравнения.

2) Исследовать разрешимость уравнения при различных значениях  $\lambda$  и найти решение, если оно существует, в следующих случаях:

а)  $f(x) = \sin 2\pi x$ ;

б)  $f(x) = x$ .

**Решение.** 1) Если  $\lambda \neq \lambda_n = n^2 \pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), то используя построенную в примере 7.7 ортонормированную систему  $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$ , запишем соответствующую формулу для резольвенты интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin \pi n x \cdot \sqrt{2} \sin \pi s}{\pi^2 n^2 - \lambda}.$$

Тогда решение неоднородного уравнения примет вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x, s, \lambda) f(s) ds = f(x) + \lambda \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \sin \pi s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot f(s) ds.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в последней формуле, получим решение в виде разложения в ряд по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \int_0^1 \sqrt{2} \sin \pi n s \cdot f(s) ds = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \cdot \sqrt{2} \sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda},$$

где  $f_n = 2 \int_0^1 \sin \pi n s \cdot f(s) ds$  - коэффициенты Фурье по соответствующей ортонормированной системе  $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$ .

2) Если  $\lambda \neq \lambda_n = n^2 \pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), то неоднородное уравнение разрешимо при любой непрерывной функции  $f(x)$ . Используя полученные выше формулы и вычисляя соответствующие интегралы, имеем:

а)  $y(x) = \sin 2\pi x + \lambda \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \sin 2\pi s ds = \sin 2\pi x + \lambda \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda} = \frac{4\pi^2 \sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda};$

б)  $y(x) = x + \lambda \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot s ds = x + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi n x}{\pi n (\pi^2 n^2 - \lambda)}.$

Если же  $\exists n \in \mathbb{N}$  такое, что  $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$ , т.е.  $\lambda$  совпадает с одним из характеристических чисел, то ответ на вопрос о разрешимости уравнения зависит от конкретного вида функции  $f(x)$ .

В случае б) решение не существует ни при каких  $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), так как  $f(x) = x$  при любом  $n$  не ортогональна соответствующей собственной функции

$\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$  однородного союзного уравнения (ядро симметрично, поэтому однородное союзное уравнение совпадает с исследуемым при  $f(x) \equiv 0$ ).

В случае а) необходимо рассмотреть два варианта.

При  $\lambda = 4\pi^2$  решение не существует, так как неоднородность  $f(x) = \sin 2\pi x$  не ортогональна собственной функции  $\varphi_2(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi x$  однородного союзного уравнения, отвечающей заданному значению  $\lambda = \lambda_2 = 4\pi^2$ .

При  $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2 \neq 4\pi^2$  функция  $f(x) = \sin 2\pi x$  ортогональна собственной функции  $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$  ( $n \neq 2$ ) однородного союзного уравнения, отвечающей рассматриваемому  $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$ ,  $n \neq 2$ , т.е. решение существует, но не единственно и представимо в виде  $y(x) = \sin 2\pi x + \underbrace{\pi^2 n^2}_{\lambda} \int_0^1 2 \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{\sin \pi k x \sin \pi k s}{\pi^2 k^2 - \underbrace{\pi^2 n^2}_{\lambda}} \cdot \sin 2\pi s ds + C \sin \pi n x$ , где

$C$  - произвольная постоянная. Меняя порядок суммирования и интегрирования, заметим, что все слагаемые в сумме при  $k \neq 2$  равны нулю, т.к.  $\int_0^1 \sin \pi k s \cdot \sin 2\pi s ds = 0$  ( $k \neq 2$ ).

Поэтому, учитывая что  $\int_0^1 \sin 2\pi s \cdot \sin 2\pi s ds = \frac{1}{2}$  ( $k = 2$ ), окончательно получим

$$y(x) = \sin 2\pi x + \frac{\pi^2 n^2}{4\pi^2 - \pi^2 n^2} \sin 2\pi x + C \sin \pi n x = \frac{4 \sin 2\pi x}{4 - n^2} + C \sin \pi n x, \text{ где } C - \text{произвольно.}$$

### Задачи для самостоятельного решения

6.1 Построить резольвенту уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическим вырожденным ядром при значениях  $\lambda$ , не совпадающих ни с одним из характеристических чисел:

- через определители Фредгольма;
- в виде разложения по собственным функциям ядра:

а)  $y(x) = \lambda \int_0^1 x s y(s) ds + f(x);$

б)  $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+s) y(s) ds + f(x);$

в)  $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} y(s) ds + f(x);$

г)  $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x-s)) y(s) ds + f(x);$

д)  $y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin s + \sin 2x \sin 2s) y(s) ds + f(x).$

6.2 Исследовать разрешимость при различных значениях  $\lambda$  и решить интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а)  $y(x) = \lambda \int_0^1 x(1+s) y(s) ds + x^2;$

$$\text{б) } y(x) = \lambda \int_0^1 x y(s) ds + \sin 2\pi x;$$

$$\text{в) } y(x) = \lambda \int_0^1 (1+2x)s y(s) ds + 1 - \frac{3}{2}x;$$

$$\text{г) } y(x) = \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi s y(s) ds + x;$$

$$\text{д) } y(x) = \lambda \int_0^1 \arccos s \cdot y(s) ds + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{е) } y(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} s \cdot y(s) ds + \operatorname{ctg} x;$$

$$\text{ж) } y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos s y(s) ds + \cos x;$$

$$\text{з) } y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+s) y(s) ds + 1;$$

$$\text{и) } y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xs) y(s) ds + \sin \pi x;$$

$$\text{к) } y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-s) y(s) ds + \sin 2x;$$

$$\text{л) } y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xs^3 + 5x^2s^2) y(s) ds + 7x^4 + 3;$$

$$\text{м) } y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s) y(s) ds + \cos \pi x, \quad \text{где } K(x,s) = \begin{cases} (x+1)s, & 0 \leq x \leq s \\ (s+1)x, & s \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

### Ответы к задачам

$$6.1 \quad \text{а) } R(x,s,\lambda) = \frac{xs}{1 - \frac{1}{3}\lambda} = \frac{3xs}{3-\lambda};$$

$$\text{б) } R(x,s,\lambda) = \frac{2\lambda(1+3xs) + 3(x+s)}{3-4\lambda^2};$$

$$\text{в) } R(x,s,\lambda) = \frac{1}{1-\lambda\pi};$$

$$\text{г) } R(x,s,\lambda) = \frac{1}{1-2\pi\lambda} + \frac{\cos(x-s)}{1-\lambda\pi};$$

$$\text{д) } R(x,s,\lambda) = \frac{\sin x \sin s + \sin 2x \sin 2s}{1-\lambda\pi}.$$

$$6.2 \quad \text{а) При } \lambda \neq \frac{6}{5} \text{ - единственное решение } y(x) = x^2 + \frac{x}{2} \cdot \frac{7\lambda}{6-5\lambda}; \quad \text{при } \lambda = \frac{6}{5} \text{ - решений нет.}$$

- б) При  $\lambda \neq 2$  - единственное решение  $y(x) = \sin 2\pi x$ ;  
при  $\lambda = 2$  -  $y(x) = Cx + \sin 2\pi x$  - решение не единственно.
- в) При  $\lambda \neq \frac{6}{7}$  - единственное решение  $y(x) = 1 - \frac{3}{2}x$ ;  
при  $\lambda = \frac{6}{7}$  -  $y(x) = 1 - \frac{3}{2}x + C(1 + 2x)$  - решение не единственно.
- г) При  $\lambda \neq -2\pi$  - единственное решение  $y(x) = \frac{2\pi x}{\lambda + 2\pi}$ ; при  $\lambda = -2\pi$  - решений нет.
- д) При  $\lambda \neq 1$  - единственное решение  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi^2 \lambda}{8(1-\lambda)}$ ; при  $\lambda = 1$  - решений нет.
- е) При всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  - единственное решение  $y(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{\pi \lambda}{2}$ .
- ж) При всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  - единственное решение  $y(x) = \cos x + \frac{\pi \lambda}{2} \sin x$ .
- з) При  $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$  - единственное решение  $y(x) = 1 - \frac{4\lambda \sin x}{2 + \lambda \pi}$ ; при  $\lambda = -\frac{2}{\pi}$  - решений нет;  
при  $\lambda = \frac{2}{\pi}$  -  $y(x) = C \cos x - \frac{2}{\pi} \sin x + 1$  - решение не единственно.
- и) При  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{3}{2}$  - единственное решение  $y(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3\lambda}{3-2\lambda} x$ ;  
при  $\lambda = \frac{3}{2}$  - решений нет;  
при  $\lambda = \frac{1}{2}$  -  $y(x) = C + \sin \pi x + \frac{3x}{2\pi}$  - решение не единственно.
- к) При  $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$ ,  $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$  - единственное решение  $y(x) = \frac{2 \sin 2x}{2 - \lambda \pi}$ ;  
при  $\lambda = \frac{2}{\pi}$  - решений нет; при  $\lambda = \frac{1}{\pi}$  -  $y(x) = 2 \sin 2x + C$  - решение не единственно.
- л) При  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \neq \frac{5}{4}$  - единственное решение  $y(x) = 3 + \frac{20\lambda}{1-2\lambda} x^2 + 7x^4$ ;  
при  $\lambda = \frac{1}{2}$  - решений нет;  
при  $\lambda = \frac{5}{4}$  -  $y(x) = 3 + Cx - \frac{50}{3} x^2 + 7x^4$  - решение не единственно.
- м) При  $\lambda \neq 1$ ,  $\lambda \neq -\pi^2 n^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) - единственное решение  

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda \left[ \frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda-1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda + \pi^2)} \right];$$
при  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = -\pi^2$  - решений нет;  
при  $\lambda = -\pi^2 n^2$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) - решение не единственно  

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda \left[ \frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda-1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda + \pi^2)} \right] + C(\sin \pi x + n\pi \cos \pi x).$$

## ТЕМА 7

### *Задача Штурма-Лиувилля.*

#### *Собственные значения и собственные функции.*

#### *Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.*

### Основные определения и теоремы

Оператором Штурма-Лиувилля называется дифференциальный оператор 2-го порядка  $Ly = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y$ , где коэффициенты  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\rho(x)$  удовлетворяют условиям:  $p(x)$  непрерывно дифференцируемая, а  $q(x)$  и  $\rho(x)$  непрерывные на  $[a, b]$  функции, причем  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  ( $x \in [a, b]$ ).

Поставим вопрос: найти такие числа  $\lambda$ , при которых существует нетривиальное решение следующей краевой задачи ( $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ ,  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ ):

$$\begin{cases} Ly + \lambda \rho(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Эта задача называется краевой задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (сокращенно - задача Штурма-Лиувилля); числа  $\lambda_n$ , при которых существуют нетривиальные решения, - собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения - собственными функциями.

*Замечание.* Возможны и другие типы дополнительных условий (см. пример 7.5 и задачу 7.3).

Обозначим  $G(x, s)$  функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Функция  $G(x, s)$  непрерывна по совокупности аргументов и симметрична, т.е.  $G(x, s) = G(s, x)$ ; она существует, если однородная краевая задача

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

имеет только тривиальное решение, т.е.  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора  $L$ .

При этих условиях задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к эквивалентной задаче на характеристические числа и собственные функции

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x, s) \rho(s) y(s) ds$$

для интегрального оператора с непрерывным ядром  $G(x, s)\rho(s)$ . Если  $\rho(s) \neq 1$ , то ядро интегрального оператора не является симметрическим. Однако ядро

$$K(x, s) = \sqrt{\rho(x)} G(x, s) \sqrt{\rho(s)}$$

уже является непрерывным и симметрическим.

В курсе лекций для первой краевой задачи  $\begin{cases} Ly + \lambda \rho(x)y = 0 \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \end{cases}$  доказано

существование функции Грина при условиях  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  и получены следующие свойства собственных значений и собственных функций.

**Теорема.** Задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции  $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$  для интегрального оператора с непрерывным симметрическим замкнутым ядром  $K(x, s) = -\sqrt{\rho(x)} G(x, s) \sqrt{\rho(s)}$ , где  $\varphi(x) = y(x)\sqrt{\rho(x)}$ .

**Теорема.** Собственные значения  $\lambda_n$  задачи Штурма-Лиувилля вещественны и образуют бесконечную последовательность, причем  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема.** Каждое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля имеет кратность единица.

**Теорема.** Собственные функции  $y_i(x)$ ,  $y_k(x)$  задачи Штурма-Лиувилля, отвечающие различным собственным значениям  $\lambda_i$ ,  $\lambda_k$ , ортогональны на отрезке  $[a, b]$  с весом  $\rho(x)$ , т.е.  $\int_a^b y_i(x) y_k(x) \rho(x) dx = 0$  при  $\lambda_i \neq \lambda_k$ , и могут быть нормированы с весом  $\rho(x)$ :  $\int_a^b y_k^2(x) \rho(x) dx = 1$ .

**Теорема.** (Стеклова). Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющая однородным краевым условиям на его концах функция  $f(x)$  представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортонормированной с весом  $\rho(x)$  системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$ , где коэффициенты Фурье равны  $f_n = \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx$ .

**Теорема.** Собственные значения первой краевой задачи Штурма-Лиувилля положительны. Имеет место следующая оценка снизу для наименьшего собственного значения:

$$\lambda_1 = \int_a^b \left[ q y_1^2 + p \left( \frac{dy_1}{dx} \right)^2 \right] dx > \inf_{x \in [a, b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0.$$

Заметим, что перечисленные результаты остаются справедливыми и для второй краевой задачи (граничные условия имеют вид  $y'(a) = 0$ ,  $y'(b) = 0$ ), если  $q(x) \neq 0$ , для третьей краевой задачи (граничные условия имеют вид  $y'(a) - h_1 y(a) = 0$ ,  $y'(b) + h_2 y(b) = 0$ ), если  $h_1, h_2$  – положительные постоянные, а также для смешанных краевых задач, когда левом конце задается условие одного вида, а на правом другого.

Необходимо помнить, что в случае второй краевой задачи при  $q(x) \equiv 0$  существует нулевое собственное значение, а остальные собственные значения положительны.

В некоторых случаях задача построения последовательности характеристических чисел и собственных функций интегрального оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром специального вида может быть сведена к задаче Штурма-Лиувилля (примеры 7.7 и 7.8)



## Примеры решения задач

**Пример 7.1.** Доказать, что оператор  $Ly = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right)$ , рассматриваемый на подпространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций из  $h[a, b]$ , удовлетворяющих граничным условиям  $y'(a) = 2y(a)$ ,  $y'(b) = 0$ , является симметрическим.

**Решение.** Требуется доказать, для любых двух функций  $y(x)$ ,  $z(x)$  из указанного подпространства имеет место равенство  $(Ly, z) = (y, Lz)$ , где скалярное произведение в  $h[a, b]$  введено обычным образом:  $(y, z) = \int_a^b y(x)z(x)dx$ .

Рассмотрим произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на  $[a, b]$  функции  $y(x)$ ,  $z(x)$  такие, что  $y'(a) = 2y(a)$ ,  $y'(b) = 0$  и  $z'(a) = 2z(a)$ ,  $z'(b) = 0$ . Тогда, интегрируя по частям и учитывая граничные условия, будем иметь:

$$\begin{aligned} (Ly, z) &= \int_a^b [(p(x)y'(x))' z(x)] dx = [py']z \Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)dx \\ (y, Lz) &= \int_a^b y(x)[(p(x)z'(x))'] dx = y[pz'] \Big|_a^b - \int_a^b y'(x)p(x)z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)dx \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения, заключаем, что для любых элементов рассматриваемого подпространства выполнено соотношение  $(Ly, z) = (y, Lz)$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Из полученного результата вытекает, что все собственные значения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля вещественны.

**Пример 7.2.** Доказать, что все собственные значения третьей краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} Ly + \lambda \rho(x)y = 0 \\ y'(a) - y(a) = 0, \quad y'(b) + 3y(b) = 0 \end{cases}$$

положительны, если оператор  $Ly = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y$ , причем  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$   $x \in [a, b]$ .

**Решение.** Заметим, что все собственные значения - вещественны. Это следует из симметричности оператора при заданных граничных условиях, которая может быть установлена аналогично примеру 7.1.

Пусть  $\lambda$  - собственное значение задачи, а  $y(x) \neq 0$  - соответствующая собственная функция, т.е.  $y(x)$  является решением уравнения  $\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0$ . Умножим это уравнение на  $y(x)$  и проинтегрируем по отрезку  $[a, b]$  (первое слагаемое в левой части формулы интегрируется по частям):

$$\int_a^b [(p(x)y')' - q(x)y) y(x)] dx \equiv p(x)y'y \Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'^2(x) dx - \int_a^b q(x)y^2(x) dx = -\lambda \int_a^b \rho(x)y^2(x) dx.$$

Учитывая граничные условия  $y'(a) = y(a)$ ,  $y'(b) = -3y(b)$ , и то, что  $y(x) \neq 0$ , получим

$$\lambda \int_a^b \underbrace{\rho(x)y^2(x)dx}_{>0, \text{ т.к. } \rho(x)>0} = \underbrace{p(b)3y^2(b)}_{\geq 0} + \underbrace{p(a)y^2(a)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_a^b p(x)y'^2(x)dx}_{>0, \text{ если } y(x) \neq \text{const}} + \underbrace{\int_a^b q(x)y^2(x)dx}_{\geq 0}.$$

=0, если  $y(x) \equiv \text{const}$

Если  $y(x) \neq \text{const}$ , то правая часть равенства положительна, следовательно  $\lambda > 0$ ; если же считать  $y(x) \equiv \text{const}$ , то из граничных условий следует  $y(x) \equiv 0$ , что противоречит сделанному выше предположению. Итак,  $\lambda > 0$ , что и требовалось.

**Пример 7.3.** Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \end{cases}.$$

**Решение.** В рассматриваемом случае имеем  $\rho(x) = 1 > 0$ ,  $p(x) = 1 > 0$ ,  $q(x) \equiv 0$   $x \in [0, l]$ , поэтому можно, действуя как в примере 7.2, установить, что все собственные значения действительны, причем одно из них  $\lambda_0 = 0$ , а остальные - положительные.

В случае  $\lambda = \lambda_0 = 0$  имеем  $y(x) = C_1 x + C_2$  и, учитывая граничные условия, получаем  $y_0(x) = C$ .

Пусть  $\lambda > 0$ , тогда общее решение уравнения имеет вид  $y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$ .

Дополнительные условия дают  $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ ,  $y'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ , откуда получаем  $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$ . Следовательно, искомые собственные значения

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ а отвечающие им собственные функции } y_n(x) = C \cos \frac{\pi n}{l} x.$$

**Пример 7.4.** Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}.$$

**Решение.** Так как  $\rho(x) = 1 > 0$ ,  $p(x) = 1 > 0$ ,  $q(x) \equiv 0$   $x \in [0, l]$ , то все собственные значения действительны и положительны.

Общее решение уравнения имеет вид  $y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$ , и из граничных условий вытекает  $y'(0) - y(0) = C_1 \sqrt{\lambda} - C_2 = 0$ ,  $y(1) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda} = 0$ . Нетривиальное решение этой системы, т.е.  $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ , существует, если

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & -1 \\ \sin \sqrt{\lambda} & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Поэтому  $\lambda$  определяется из трансцендентного уравнения  $\text{tg} \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$ , положительные решения которого и будут искомыми собственными значениями.

Далее, рассмотрев любое из уравнений системы для  $C_1, C_2$ , имеем  $C_2 = C_1 \sqrt{\lambda_n} = -C_1 \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n}$ , откуда получим

$$y_n(x) = C_1 (\sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x) = C_1 (\sin \sqrt{\lambda_n} x - \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x).$$

Итак, собственные значения  $\lambda_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля есть положительные решения уравнения  $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$ , а соответствующие им собственные функции могут быть после несложных преобразований записаны в виде  $y_n(x) = C \sin \sqrt{\lambda_n}(x-1)$ .

**Пример 7.5.** Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}.$$

**Решение.** Действуя как в примере 7.2, нетрудно показать, что в рассматриваемом случае все собственные значения неотрицательны.

Пусть  $\lambda = 0$ , тогда  $y(x) = C_1 x + C_2$  и, учитывая дополнительные условия, имеем  $y(x) = C$ . Поэтому  $\lambda_0 = 0$  - собственное значение задачи с собственной функцией  $y_0(x) = 1$ .

Если  $\lambda > 0$ , то общее решение уравнения имеет вид  $y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$ , и из граничных условий вытекает

$$\begin{aligned} y(0) - y(2\pi) &= C_2 - C_2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - C_1 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi = 0, \\ y'(0) - y'(2\pi) &= \sqrt{\lambda} (C_1 - C_1 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Нетривиальное решение этой системы, т.е.  $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ , существует, если

$$\begin{vmatrix} -\sin \sqrt{\lambda} 2\pi & 1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi \\ 1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi & \sin \sqrt{\lambda} 2\pi \end{vmatrix} = 2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - 2 = 0.$$

Поэтому  $\lambda_n = n^2$ ,  $n=1,2,3,\dots$ , и при найденных значениях  $\lambda$  существуют по два линейно

независимых решения  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , которые при каждом

$\lambda_n = n^2$ ,  $n=1,2,3,\dots$  определяют две линейно независимых собственные функции  $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$  и  $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$ .

Итак, собственное значение  $\lambda_0 = 0$  имеет кратность 1, и ему соответствует собственная функция  $y_0(x) = 1$ ; собственные значения  $\lambda_n = n^2$ ,  $n=1,2,3,\dots$  имеют кратность 2, и им отвечает по 2 линейно независимые функции  $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$  и  $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$ .

**Замечание.** Дополнительные условия, поставленные в этом примере, возникают при рассмотрении периодических задач, т.е.  $y(x) = y(x+2\pi)$ .

**Пример 7.6.** Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля  $y'' + \lambda \cdot (1+x^2)y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$  к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром.

**Решение.** В нашем случае  $Ly \equiv y''$ ,  $p(x) = 1 > 0$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $\rho(x) = 1+x^2 > 0$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Докажем, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля, т.е. однородное уравнение  $Ly \equiv y'' = 0$  с условиями  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$  имеет только тривиальное решение. Действительно,  $y(x) = C_1 x + C_2$ , откуда с учетом дополнительных условий получаем  $y(x) \equiv 0$ . Это означает, что функция Грина оператора  $Ly \equiv y''$  при условиях  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$  существует и, следовательно, задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к интегральному уравнению.

Построив функцию Грина  $G(x, s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \leq x \leq s \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$  и рассматривая выражение  $-\lambda(1+x^2)y$  как неоднородность, приведем уравнение к виду  $y(x) = \lambda \int_0^1 -G(x, s)(1+s^2)y(s)ds$ .

Чтобы симметризовать ядро, умножим последнее соотношение на  $\sqrt{1+x^2}$  и введем в рассмотрение функцию  $\varphi(x) = y(x)\sqrt{1+x^2}$ . Тогда получим  $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\varphi(s)ds$  - интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром  $K(x, s) = -\sqrt{1+x^2} \cdot G(x, s) \cdot \sqrt{1+s^2}$  для функции  $\varphi(x)$ .

**Пример 7.7.** Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)y(s)ds$  с симметрическим непрерывным (невыврожденным) ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s \\ s(1-x), & s \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad x, s \in [0; 1].$$

Найти характеристические числа и ортонормированные собственные функции этого ядра.

**Решение.** Чтобы определить характеристические числа, нужно найти те значения  $\lambda$ , при которых уравнение  $y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)y(s)ds = 0$  имеет нетривиальные решения; соответствующие решения  $y(x) \neq 0$  и есть искомые собственные функции.

Заметим, что ядро  $K(x, s)$  в рассматриваемом случае имеет специфическую структуру, напоминающую функцию Грина некоторой краевой задачи. Поэтому следует ожидать, что процедура построения характеристических чисел и собственных функций может быть сведена к решению задачи Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде  $y(x) = \lambda(1-x) \int_0^x s y(s)ds + \lambda x \int_x^1 (1-s)y(s)ds$ , откуда следует, что  $y(0) = y(1) = 0$ . После двукратного дифференцирования обеих частей этого соотношения по  $x$  приходим к дифференциальному уравнению  $y'' + \lambda y = 0$ .

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения  $y'' + \lambda y = 0$  с граничными условиями  $y(0) = y(1) = 0$ .

Нетрудно показать, что если  $\lambda \leq 0$ , то имеется только нулевое решение  $y(x) \equiv 0$ .

При  $\lambda > 0$  получим  $y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x$ , следовательно, нетривиальные решения существуют тогда и только тогда, если  $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). При этом ранг каждого характеристического числа равен единице, так как им отвечают одномерные собственные подпространства вида  $y_n(x) = C \sin \pi n x$ .

Так как ядро оператора симметрическое, то собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны. Нормируя их, получим ортонормированную систему собственных функций  $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$ .

*Замечание.* Приведенный здесь алгоритм нахождения характеристических чисел и собственных функций учитывает специфику структуры ядра  $K(x, s)$ , которое представляет собой функцию Грина некоторой краевой задачи. Другие способы построения характеристических чисел и собственных функций были рассмотрены в примерах и задачах к темам 3 и 6.

*Пример 7.8.* Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма  $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) y(s) ds$  с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} s(x+1), & 0 \leq x \leq s \\ x(s+1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad x, s \in [0; 1].$$

*Решение.* Действуя как в предыдущем примере, сведем интегральное уравнение к краевой задаче Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде  $y(x) = \lambda x \int_0^x (s+1) y(s) ds + \lambda(x+1) \int_x^1 s y(s) ds$ .

Дифференцируя это соотношение, найдем

$$y'(x) = \lambda \int_0^x (s+1) y(s) ds + x(x+1) y(x) + \lambda \int_x^1 s y(s) ds - (x+1) x y(x).$$

Заметим, что

$$y(0) = \lambda \int_0^1 s y(s) ds, \quad y(1) = \lambda \int_0^1 (s+1) y(s) ds, \quad y'(0) = \lambda \int_0^1 s y(s) ds, \quad y'(1) = \lambda \int_0^1 (s+1) y(s) ds.$$

Дифференцируя уравнение еще раз, получим  $y''(x) = \lambda(x+1)y(x) - \lambda x y(x) = \lambda y(x)$ .

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1) \end{cases}.$$

Так как ядро симметрическое, то все характеристические числа - вещественные. Однако в данном случае знак характеристических чисел заранее неизвестен, поэтому для решения задачи необходимо рассмотреть обе возможности:  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$  (случай  $\lambda = 0$ , как следует из определения характеристического числа, невозможен).

1. Пусть  $\lambda > 0$ . Тогда общее решение уравнения имеет вид  $y(x) = C_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$ . Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}}) \end{cases},$$

которая имеет нетривиальные решения при условии  $(1 - \lambda) \cdot sh \sqrt{\lambda} = 0$ . Таким образом,  $\lambda_0 = 1$  - характеристическое число; ранг его равен 1, и ему отвечает собственное подпространство вида  $y_0(x) = Ce^x$ .

2. Пусть  $\lambda = -\omega^2 < 0$ . Тогда общее решение уравнения имеет вид  $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ . Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 = \omega C_2 \\ C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega = \omega(-C_1 \sin \omega + C_2 \cos \omega) \end{cases},$$

условием нетривиальной совместности которой является  $(1 + \omega^2) \cdot \sin \omega = 0$ , т.е.  $\omega_n = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Итак, характеристические числа  $\lambda_n = -\pi^2 n^2 < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ранг каждого характеристического числа равен единице, и им отвечают собственные функции вида  $y_n(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

7.1 Доказать, что все собственные значения  $\lambda$  задачи Штурма-Лиувилля

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0, \quad x \in (a, b), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \rho(x) > 0$$

положительны при следующих граничных условиях:

- а)  $y'(a) = 0, \quad y(b) = 0$ ;
- б)  $y(a) = 0, \quad y'(b) = 0$ ;
- в)  $y(a) - 2y'(a) = 0, \quad y(b) + y'(b) = 0$ ;
- г)  $y(a) - y'(a) = 0, \quad y(b) + 2y'(b) = 0$ .

7.2 Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

- а)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0$ ;
- б)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0$ ;
- в)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) + hy(1) = 0 \quad (h > 0)$ ;
- г)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) + hy(l) = 0 \quad (h > 0)$ ;
- д)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad (h > 0)$ ;
- е)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(l) + h_2 y(l) = 0 \quad (h_1, h_2 > 0)$ ;
- ж)  $(xy')' + \lambda \frac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0$ .

7.3 Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром:

- а)  $y'' + \lambda \cdot (1 + x^2)y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$ ;
- б)  $y'' + \lambda \cdot e^{2x}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$ ;
- в)  $y'' + \lambda \cdot e^{2x}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$ ;
- г)  $y'' + \lambda \cdot y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + hy'(1) = 0$ ;
- д)  $(1 + x^2)y'' + 2xy' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$ ;

- е)  $x^2 y'' + 2x y' + \lambda x^2 y = 0$ ,  $y'(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$ ;  
ж)  $(xy')' + \lambda xy = 0$ ,  $|y(0)| < \infty$ ,  $y(1) = 0$ ;  
з)  $(xy')' + (\lambda x - \frac{n^2}{x}) \cdot y = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$ ,  $|y(0)| < \infty$ ,  $y(1) = 0$ .

7.4 Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным симметрическим невырожденным ядром, в следующих случаях:

- а)  $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) y(s) ds$ , где  $K(x, s) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq s \\ s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$ ;  
б)  $y(x) = \lambda \int_0^\pi K(x, s) y(s) ds$ , где  $K(x, s) = \begin{cases} \cos x \sin s, & 0 \leq x \leq s \\ \cos s \sin x, & s \leq x \leq \pi \end{cases}$ ;  
в)  $y(x) = \lambda \int_0^\pi K(x, s) y(s) ds$ , где  $K(x, s) = \begin{cases} \sin x \cos s, & 0 \leq x \leq s \\ \sin s \cos x, & s \leq x \leq \pi \end{cases}$ .

Указание. Свести интегральное уравнение к задаче Штурма-Лиувилля.

### Ответы к задачам

7.2 а)  $\lambda_n = \left[ \frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) \right]^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $y_n(x) = C \cos \frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) x$ ;

б)  $\lambda_n = \left[ \frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) \right]^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $y_n(x) = C \sin \frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) x$ ;

в)  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  - положительные решения уравнения  $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$ ;  
 $y_n(x) = C \sin x \sqrt{\lambda_n}$ ;

г)  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  - положительные решения уравнения  $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$ ;  
 $y_n(x) = C \cos x \sqrt{\lambda_n}$ ;

д)  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  - положительные решения уравнения  $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$ ;  
 $y_n(x) = C \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x)$ ;

е)  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  - корни уравнения  $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = \sqrt{\lambda} \frac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$ ;  
 $y_n(x) = C (h_1 \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x)$ ;

ж)  $\lambda_n = \left[ \frac{\pi n}{\ln 2} \right]^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $y_n(x) = C \sin \frac{\pi n}{\ln 2} \ln x$ .

7.3 а)  $G(x, s) = \begin{cases} s-1, & 0 \leq x \leq s \\ x-1, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$ ,  $K(x, s) = -\sqrt{1+x^2} \cdot G(x, s) \cdot \sqrt{1+s^2}$ ;

б)  $G(x, s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \leq x \leq s \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$ ,  $K(x, s) = -e^x \cdot G(x, s) \cdot e^s$ ;

$$\begin{aligned}
\text{в)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s \\ -s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -e^x \cdot G(x, s) \cdot e^s; \\
\text{г)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \frac{s-(h+1)}{h+1}x, & 0 \leq x \leq s \\ \frac{x-(h+1)}{h+1}s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -G(x, s); \\
\text{д)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} -\operatorname{arctg} x, & 0 \leq x \leq s \\ -\operatorname{arctg} s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -G(x, s); \\
\text{е)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \frac{1}{s} - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq s \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2}, & s \leq x \leq 2 \end{cases}, & K(x, s) &= -x \cdot G(x, s) \cdot s; \\
\text{ж)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \ln s, & 0 \leq x \leq s \\ \ln x, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -\sqrt{x} \cdot G(x, s) \cdot \sqrt{s}; \\
\text{з)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \frac{1}{2n} \left[ (xs)^n - \left( \frac{x}{s} \right)^n \right], & 0 \leq x \leq s \\ \frac{1}{2n} \left[ (xs)^n - \left( \frac{s}{x} \right)^n \right], & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -\sqrt{x} \cdot G(x, s) \cdot \sqrt{s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.4 \quad \text{а)} \quad \lambda_n &= \pi^2 (n + \tfrac{1}{2})^2, & y_n &= C \sin \pi (n + \tfrac{1}{2})x, & n &= 0, 1, 2, \dots; \\
\text{б)} \quad \lambda_n &= 1 - (n + \tfrac{1}{2})^2, & y_n &= C \cos (n + \tfrac{1}{2})x, & n &= 0, 1, 2, \dots; \\
\text{в)} \quad \lambda_n &= (n + \tfrac{1}{2})^2 - 1, & y_n &= C \sin (n + \tfrac{1}{2})x, & n &= 0, 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$



## ТЕМА 8

### *Основные понятия вариационного исчисления. Задача с закрепленными концами.*

#### Основные определения и теоремы

Если на некотором множестве функций указано правило, которое ставит в соответствие каждой функции некоторое число, то на этом множестве задан функционал. Будем рассматривать функционалы, действующие из линейного нормированного пространства  $E$  в пространство вещественных чисел  $\mathbb{R}^1: E \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Итак, функционал – это оператор, множество значений которого состоит из чисел.

Будем рассматривать следующие линейные пространства  $E$  (или их подмножества  $E'$ ):

1)  $C[a, b]$  – пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций, в котором определена норма

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|.$$

2)  $C^{(1)}[a, b]$  – пространство функций, непрерывных вместе со своими первыми производными на  $[a, b]$ . Норма в этом пространстве определяется как

$$\|y\|_{C^{(1)}[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

**Определение.** Функционал  $V[y]$  называется непрерывным в точке  $y_0 \in E$ , если для  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  такое, что при  $\forall y \in E: \|y - y_0\| \leq \delta$  выполняется неравенство  $|V[y] - V[y_0]| \leq \varepsilon$ .

Аналогично можно дать определение непрерывности функционала в точке  $y_0 \in E'$ , если функционал рассматривается только на множестве  $E'$ . Функционал называется непрерывным на всём пространстве  $E$  (множестве  $E'$ ), если он непрерывен в каждой точке  $E(E')$ .

**Определение.** Точка  $y_0$  является точкой локального минимума (максимума) функционала  $V[y]$ , если найдется число  $r > 0$  такое, что для любого  $y \in E: \|y - y_0\|_E \leq r$  выполнено неравенство  $V[y] \geq V[y_0]$  ( $V[y] \leq V[y_0]$ ).

Пусть  $y_0 \in E$  – произвольная фиксированная точка,  $h \in E$  – произвольный элемент  $E$ . Рассмотрим функцию вещественной переменной  $t$   $\Phi(t) \equiv V[y_0 + th]$ ,  $t$  – вещественное число.

**Определение.** Если для любого  $h \in E$  существует  $\Phi'(t)_{t=0} = \frac{d}{dt} V[y_0 + th]_{t=0}$ , то эта производная называется вариацией (слабой вариацией) функционала  $V$  в точке  $y_0$  и обозначается  $\delta V(y_0, h)$ . Очевидно, что  $V[y_0 + th] - V[y_0] = t \delta V(y_0, h) + o(|t|)$ .

**Определение.** Функционал  $V[y]$  называется дифференцируемым в точке  $y_0$ , если для любого  $h \in E$   $V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_0, h) + o(\|h\|)$ , где  $dV(y_0, h)$  – линейный и непрерывный по  $h$  функционал, который иногда называют сильной вариацией в точке  $y_0$ , в то время как функционал (от  $h$ )  $\delta V(y_0, h)$  – слабой вариацией в точке  $y_0$ .

Если существует сильная вариация, то существует и вариация (слабая вариация). Обратное, вообще говоря, неверно.

**Теорема (необходимое условие экстремума).** Пусть  $y_0 \in E$  - точка экстремума  $V[y]$  и существует  $\delta V(y_0, h)$  для всякого  $h \in E$ . Тогда  $\delta V(y_0, h) = 0$ .

Конкретизируем вид функционала и множество допустимых функций. Рассмотрим функционал  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$  на множестве функций  $E' \subseteq E = C^1[a, b]$  таком, что  $E' = \{y \in C^{(1)}[a, b], y(a) = A, y(b) = B\}$ . Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами): среди всех функций из множества  $E'$  определить ту, которая реализует экстремум функционала  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ .

**Определение.** Функционал достигает сильного минимума (максимума) на функции  $y_0(x)$ , если найдется число  $r > 0$  такое, что для любой функции из сильной окрестности  $y_0(x)$ , т.е.  $y \in E': \|y - y_0\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| \leq r$ , выполнено неравенство  $V[y] \geq V[y_0]$  ( $V[y] \leq V[y_0]$ ).

**Определение.** Функционал достигает слабого минимума (максимума) на функции  $y_0(x)$ , если найдется число  $r > 0$  такое, что для любой функции из слабой окрестности  $y_0(x)$ , т.е.  $y \in E': \|y - y_0\|_{C^{(1)}[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x) - y_0'(x)| \leq r$ , выполнено неравенство  $V[y] \geq V[y_0]$  ( $V[y] \leq V[y_0]$ ).

Ясно, что если на функции  $y_0(x)$  реализуется сильный экстремум, то имеет место и слабый в той же точке. Обратное, вообще говоря, неверно.

**Теорема (необходимое условие экстремума в задаче с закрепленными концами).**

- 1) Пусть  $y(x)$  реализует экстремум (сильный или слабый) функционала  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$  с условиями  $y(a) = A, y(b) = B$  и является дважды непрерывно дифференцируемой.
- 2) Пусть функция  $F(x, y, y')$  имеет непрерывные производные до второго порядка включительно при  $x \in [a, b]$  и в некоторой области изменения  $y$  и  $y'$ , содержащей  $y(x)$ .

Тогда  $y(x)$  является решением краевой задачи для уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0; \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Решения этой задачи называются экстремалами функционала  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ .

Так как уравнение Эйлера, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка, то решение его может быть как единственным, так и не единственным, и может не существовать вовсе.

Приемы интегрирования уравнения Эйлера зависят от конкретного вида функции  $F(x, y, y')$ . Приведем некоторые примеры для некоторых, часто встречающихся случаев.

1.  $F$  не зависит от  $y'$ :  $F(x, y, y') = F(x, y)$ .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид  $F_y(x, y) = 0$ , т.е. является не дифференциальным, а алгебраическим, поэтому его решение (если оно существует) представляет собой одну или несколько кривых, которые, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям  $y(a) = A, y(b) = B$ .

Итак, решение краевой задачи для уравнения Эйлера в рассматриваемом случае, вообще говоря, не существует.

2.  $F$  зависит от  $y'$  линейно:  $F(x, y, y') = M(x, y) + y' \cdot N(x, y)$ .

Уравнение Эйлера имеет вид  $M_y + y'N_y - \frac{d}{dx}N(x, y) = M_y + y' \cdot N_y - N_x - N_y \cdot y' = 0$ ,

т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Полученное уравнение не является дифференциальным, поэтому краевая задача для уравнения Эйлера также, вообще говоря, не имеет решения.

В частном случае  $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$  выражение  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  является полным дифференциалом, и значение функционала 
$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx = \int_{(a,A)}^{(b,B)} M(x, y)dx + N(x, y)dy$$
 не зависит от выбора кривой, соединяющей точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ .

3.  $F$  зависит только от  $y'$ :  $F(x, y, y') = F(y')$ .

Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' \cdot F_{y'y'}(y') = 0$ . Далее возможны два варианта:

а)  $y'' = 0$ , тогда общее решение есть  $y(x) = C_1x + C_2$ , где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий;

б)  $F_{y'y'}(y') = 0$ , тогда  $y' = k_i$ , где  $k_i$  - корни алгебраического уравнения  $F''(t) = 0$ , и соответствующие решения  $y_i(x) = k_i x + \tilde{C}_i$  являются частными случаями п. а).

Поэтому, решениями уравнения Эйлера в обоих случаях а) и б) являются прямые.

4.  $F$  не зависит от  $y$ :  $F(x, y, y') = F(x, y')$ .

Уравнение Эйлера принимает вид  $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$  и имеет первый интеграл  $F_{y'}(x, y') = C$ , где  $C$  - произвольная постоянная. Дальнейшее интегрирование производится путем разрешения относительно производной, либо путем введения параметра.

5.  $F$  не зависит от  $x$ :  $F(x, y, y') = F(y, y')$ .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид  $F_y - y' \cdot F_{yy'} - y'' \cdot F_{y'y'} = 0$ .

Умножив на  $y'$ , получим  $\frac{d}{dx}(F - y' \cdot F_{y'}) = 0$  и найдем первый интеграл  $F - y' \cdot F_{y'} = C$ . Дальнейшее интегрирование также производится методами, развитыми для дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Итак, если экстремаль существует, то она, как правило, может быть включена в однопараметрическое семейство решений уравнения Эйлера  $y = y(x, C)$ .

**Определение.** Если через каждую точку области  $G$  на плоскости  $xOy$  проходит единственная кривая семейства  $y = y(x, C)$ , то это семейство называют *собственным полем* в области  $G$ .

**Определение.** Если все кривые семейства  $y = y(x, C)$  проходят через некоторую точку  $(x_0, y_0) \in G$  (центр пучка), а через каждую точку области, отличную от  $(x_0, y_0)$ , проходит одна и только одна кривая семейства, то  $y = y(x, C)$  называют *центральной полем* в области  $G$ .

Выбор любой точки области  $G$  (кроме центра пучка во втором случае) определяет единственную экстремаль, проходящую через эту точку, и задает в области  $G$  некоторую

функцию  $p(x, y)$  - наклон поля экстремалей:  $p(x, y)$  в каждой точке  $(x, y) \in G$  равна тангенсу угла наклона той экстремали, которая проходит через эту точку.

Сформулируем достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.

**Достаточные условия Вейерштрасса.** Пусть функция  $y = y_0(x)$  удовлетворяет необходимому условию экстремума, т.е. является экстремалью в задаче с закрепленными концами. Будем считать, что экстремаль  $y = y_0(x)$  на сегменте  $[a, b]$  может быть включена в поле экстремалей (собственное или центральное).

Рассмотрим кривые  $y = y(x)$ , удовлетворяющие тем же граничным условиям, что и экстремаль  $y = y_0(x)$ ,  $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$  (кривые сравнения).

Функция  $E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$  называется *функцией Вейерштрасса*. В аргументах функции  $E(x, y, p, y')$  через  $y'$  обозначается производная кривой сравнения  $y(x)$  в точке  $(x, y)$ , а через  $p = p(x, y)$  - наклон поля экстремалей в этой точке.

Приращение функционала  $V[y]$  выражается через функцию Вейерштрасса ( $y_0(x)$  - исследуемая экстремаль, а  $y(x)$  - кривая сравнения):

$$\Delta V = V[y(x)] - V[y_0(x)] = \int_a^b E(x, y(x), p(x, y(x)), y'(x)) dx.$$

Поэтому достаточным условием достижения функционалом  $V[y]$  экстремума на экстремали  $y_0(x)$  является знакоопределенность функции  $E(x, y, p, y')$  в окрестности экстремали  $y_0(x)$ . Экстремум будет слабым или сильным в зависимости от того, в слабой или сильной окрестности экстремали  $y_0(x)$  сохраняет знак функция Вейерштрасса.

**Достаточные условия слабого экстремума:**

Кривая  $y = y_0(x)$  доставляет слабый экстремум функционалу  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$  в задаче с закрепленными концами  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , если:

- 1) кривая  $y = y_0(x)$  является экстремалью функционала, т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ ;
- 2) экстремаль  $y = y_0(x)$  может быть включена в поле экстремалей на отрезке  $[a, b]$ ;
- 3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках слабой окрестности экстремали  $y = y_0(x)$ , т.е. в точках  $(x, y)$ , близких к экстремали  $y = y_0(x)$ , и для значений  $y'$ , близких к значениям  $p(x, y)$  ( $p(x, y)$  - заданная функция, так как определено поле экстремалей).

Если  $E \geq 0$ , то функционал  $V[y]$  имеет на  $y_0(x)$  слабый минимум, если  $E \leq 0$ , то функционал  $V[y]$  имеет на  $y_0(x)$  слабый максимум.

**Достаточные условия сильного экстремума.**

Кривая  $y = y_0(x)$  доставляет сильный экстремум функционалу  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$  в задаче с закрепленными концами  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , если:

- 1) кривая  $y = y_0(x)$  является экстремалью функционала т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ ;
- 2) экстремаль  $y = y_0(x)$  может быть включена в поле экстремалей на отрезке  $[a, b]$ ;

3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках сильной окрестности экстремали  $y=y_0(x)$ , т.е. в точках  $(x, y)$ , близких к экстремали  $y=y_0(x)$ , и для произвольных значений  $y'$ .

Если  $E \geq 0$ , то функционал  $V[y]$  имеет на  $y_0(x)$  сильный минимум, если  $E \leq 0$ , то функционал  $V[y]$  имеет на  $y_0(x)$  сильный максимум.

#### **Достаточное условие отсутствия экстремума.**

Если в точках экстремали  $y=y_0(x)$  при некоторых значениях  $y'$  функция  $E$  имеет противоположные знаки, то сильный экстремум на  $y_0(x)$  не достигается.

Если в точках экстремали  $y=y_0(x)$  при значениях  $y'$  сколь угодно близких к  $p(x, y)$ , функция  $E$  имеет противоположные знаки, то на  $y_0(x)$  не достигается и слабый экстремум.

#### **Достаточные условия Лежандра.**

Пусть функция  $F(x, y, y')$  имеет непрерывную вторую производную  $F_{y'y'}$   $(x, y, y')$  и экстремаль  $y=y_0(x)$  включена в поле экстремалей.

**Достаточные условия слабого экстремума** ( $F_{y'y'}$  исследуется на самой экстремали  $y=y_0(x)$ ).

Если на экстремали  $y=y_0(x) F_{y'y'} > 0$ , то функционал  $V[y]$  имеет на  $y_0(x)$  слабый минимум; если на экстремали  $y=y_0(x) F_{y'y'} < 0$ , то функционал  $V[y]$  имеет на  $y_0(x)$  слабый максимум.

**Достаточные условия сильного экстремума** ( $F_{y'y'}$  исследуется в сильной окрестности экстремали  $y=y_0(x)$ ).

Если  $F_{y'y'} \geq 0$  в точках  $(x, y)$ , близких к экстремали  $y=y_0(x)$ , и для произвольных значений  $y'$ , то  $V[y]$  имеет на экстремали  $y_0(x)$  сильный минимум.

Если  $F_{y'y'} \leq 0$  в точках  $(x, y)$ , близких к экстремали  $y=y_0(x)$ , и для произвольных значений  $y'$ , то  $V[y]$  имеет на экстремали  $y_0(x)$  сильный максимум.

### **Примеры решения задач**

**Пример 8.1.** Вычислить вариацию функционала  $V[y] = y^2(0) + \int_{-1}^1 (xy + y'^2) dx$  в точке  $y$ .

**Решение.** Найдем сначала вариацию функционала  $V[y]$ , воспользовавшись первым определением (слабую вариацию):

$$\begin{aligned} \delta V(y, h) &\equiv \left. \frac{d}{dt} V[y + th] \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[ (y(0) + th(0))^2 + \int_{-1}^1 [x(y(x) + th(x)) + (y'(x) + th'(x))^2] dx \right]_{t=0} = \\ &= 2y(0)h(0) + \int_{-1}^1 [x \cdot h(x) + 2y' \cdot h'(x)] dx. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся вторым определением и найдем вариацию как линейную часть приращения функционала в точке  $y$  (сильную вариацию). Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию  $h(x)$ :  $h(-1) = h(1) = 0$ , и вычислим приращение  $\Delta V = V[y + h] - V[y] =$

$$\begin{aligned}
&= [y(0) + h(0)]^2 - y^2(0) + \int_{-1}^1 [x(y(x) + h(x)) + (y'(x) + h'(x))^2] dx - \int_{-1}^1 [xy(x) + y'^2(x)] dx = \\
&= 2y(0)h(0) + \int_{-1}^1 [x \cdot h(x) + 2y'(x) \cdot h'(x)] dx + h^2(0) + \int_{-1}^1 h'^2(x) dx.
\end{aligned}$$

Линейная относительно  $h$  часть приращения - первые два слагаемые последнего равенства - и есть искомая (сильная) вариация

$$dV[y, h] = 2y(0)h(0) + \int_{-1}^1 [x \cdot h(x) + 2y'(x) \cdot h'(x)] dx,$$

которая в данном случае совпадает с полученной ранее (слабой) вариацией  $\delta V[y, h]$ .

**Пример 8.2.** Найти экстремаль функционала  $V[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$  с дополнительными условиями  $y(0)=0, y(1)=0$ .

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

- а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;
- б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

**Решение.** Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче  $y'' - y = 0$  имеет общее решение  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ . Граничным условиям удовлетворяет экстремаль  $y_0(x) \equiv 0$ .

- а) Непосредственное вычисление приращения функционала на кривой  $y_0(x) \equiv 0$  дает

$\Delta V = V[y] - V[y_0(x) \equiv 0] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx \geq 0$ . Поэтому на ней реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) минимум.

- б) Заметим, что экстремаль  $y_0(x) \equiv 0$  при  $x \in [0, 1]$  может быть включена в собственное поле экстремалей  $y = C e^x$ .

1. Функция Вейерштрасса  $E(x, y, p, y') = y^2 + y'^2 - y^2 - p^2 - (y' - p)^2 = (y' - p)^2 \geq 0$  при любых  $y, y'$ , т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой  $y_0(x) \equiv 0$ . Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль  $y_0(x) \equiv 0$  реализует сильный (и слабый) минимум.
2.  $F_{y'y'} = 2 > 0$  при любых  $y, y'$ , поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали  $y_0(x) \equiv 0$  достигает сильного (и слабого) минимума.

**Пример 8.3.** Найти экстремаль функционала  $V[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx$  с дополнительными условиями  $y(-1)=1, y(0)=0$ .

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

- а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;
- б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

**Решение.** Уравнение Эйлера для функционала в рассматриваемой задаче  $y'' + 6x = 0$  имеет общее решение  $y = -x^3 + C_1 x + C_2$ . Граничным условиям удовлетворяет экстремаль  $y_0(x) = -x^3$ .

а) Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию  $h(x)$ , удовлетворяющую условиям  $h(-1) = h(0) = 0$ , - и вычислим приращение функционала на экстремали  $y_0(x) = -x^3$ :

$$\begin{aligned}\Delta V &= V[-x^3 + h] - V[-x^3] = \int_{-1}^0 [12x(-x^3 + h(x)) - (-3x^2 + h'(x))^2] dx - \int_{-1}^0 [12x(-x^3) - (-3x^2)^2] dx = \\ &= \int_{-1}^0 [12x h(x) + 6x^2 h'(x) - h'^2(x)] dx = \int_{-1}^0 [12x h(x) - h'^2(x)] dx + \underbrace{\int_{-1}^0 6x^2 h'(x) dx}_{\text{инт. по частям}} = \\ &= \underbrace{6x^2 h(x)}_{=0} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 12x h(x) dx + \int_{-1}^0 [12x h(x) - h'^2(x)] dx = - \int_{-1}^0 h'^2(x) dx \leq 0.\end{aligned}$$

Итак,  $\Delta V \leq 0$  независимо от  $y'$  (в сильной окрестности), поэтому на экстремали  $y_0(x) = -x^3$  реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) максимум.

б) Заметим, что экстремаль  $y_0(x) = -x^3$  при  $x \in [-1, 0]$  может быть включена в собственное поле экстремалей (решений уравнения Эйлера)  $y = -x^3 + C$ .

1. Функция Вейерштрасса

$$E(x, y, p, y') = 12xy - y'^2 - (12xy - p^2) - (y' - p)(-2p) = -(y' - p)^2 \leq 0$$

при любых  $y, y'$ , т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой  $y_0(x) = -x^3$ . Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль  $y_0(x) = -x^3$  реализует сильный (и слабый) максимум.

2.  $F_{y'y'} = -2 < 0$  при любых  $y, y'$ , поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали  $y_0(x) = -x^3$  достигает сильного (и слабого) максимума.

**Пример 8.4.** Пусть  $V[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2y\varphi(x)] dx$ , где функция  $p(x) > 0$  - непрерывно дифференцируема, а  $q(x) \geq 0$  и  $\varphi(x)$  непрерывные на  $[a, b]$  функции.

а) Записать уравнение для экстремалей в задаче с закрепленными концами  $y(a) = A, y(b) = B$ .

б) Показать, что если  $y_0(x)$  является экстремалью функционала  $V[y]$ , то на ней реализуется минимум этого функционала.

**Решение.** Уравнение Эйлера для экстремалей изучаемого функционала имеет вид  $\frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y = \varphi(x)$ . Нетрудно показать, что при сформулированных предположениях на функции  $p(x), q(x), \varphi(x)$ , это уравнение с дополнительными условиями  $y(a) = A, y(b) = B$  имеет единственное решение  $y = y_0(x)$ , которое и определяет экстремаль в рассматриваемой задаче.

Зададим  $h(x): h(a) = h(b) = 0$  и определим знак приращения функционала на исследуемой экстремали:

$$\begin{aligned}\Delta V = V[y_0(x) + h(x)] - V[y_0(x)] &= \int_a^b [p(x)((y'_0 + h')^2 - y_0'^2) + q(x)((y_0 + h)^2 - y_0^2) + 2\varphi(x)h] dx = \\ &= \int_0^1 [2p(x)y'_0 h' + 2q(x)y_0 h + 2\varphi(x)h] dx + \underbrace{\int_a^b p(x)h'^2(x) dx}_{>0} + \underbrace{\int_a^b q(x)h^2(x) dx}_{\geq 0} > 0,\end{aligned}$$

так как первое слагаемое в этой сумме обращается в ноль. Действительно, интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$2 \int_a^b [p(x)y'_0 h' + q(x)y_0 h + \varphi(x)h] dx = \underbrace{2p(x)y_0(x)h(x)}_{=0, \text{ т.к. } h(a)=h(b)=0} \Big|_a^b + 2 \int_a^b \underbrace{[-(p(x)y'_0)' + q(x)y_0 + \varphi(x)]}_{=0 \text{ в силу ур-я Эйлера}} h(x) dx = 0$$

Итак,  $\Delta V = V[y_0(x) + h(x)] - V[y_0(x)] > 0$ , поэтому на экстремали  $y = y_0(x)$  достигается минимум исследуемого функционала, что и требовалось доказать.

**Пример 8.5.** Исследовать на экстремум функционал  $V[y] = \int_0^a y'^3 dx$  с граничными условиями  $y(0)=0, y(a)=b$  ( $a > 0, b > 0$ ).

**Решение.** Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид  $y''=0$ . Семейство экстремалей определяется формулой  $y = C_1 x + C_2$ . Граничным условиям удовлетворяет единственная экстремаль  $y = \frac{b}{a}x$ .

Найденная экстремаль может быть включена в собственное поле  $y = \frac{b}{a}x + C$ , наклон поля экстремалей  $p = \frac{b}{a}$ .

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - (y' - p)3p^2 = (y' - p)^2(y' + 2p)$$

и знак ее определяется знаком выражения  $y' + 2p = y' + 2\frac{b}{a}$ . Следовательно,  $E(x, y, p, y')$  может менять знак в зависимости от  $y'$ . Поэтому сильного экстремума на исследуемой экстремали нет.

Вместе с тем, функция Вейерштрасса сохраняет знак, если  $y'$  близко к  $p = \frac{b}{a} > 0$  (наклону поля экстремалей), т.е.  $y' + 2p = y' + 2\frac{b}{a} \geq 0$  и неравенство  $E(x, y, p, y') \geq 0$  выполнено для всех кривых сравнения  $y = y(x)$  из некоторой слабой окрестности экстремали  $y = \frac{b}{a}x$ . Таким образом, на экстремали  $y = \frac{b}{a}x$ , согласно достаточному условию Вейерштрасса, достигается слабый минимум.



Пример 8.6. Показать, что в задаче с закрепленными концами

$$V[y] = \int_0^a (y^2 - y'^2) dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=0$$

а) в случае  $a = \frac{\pi}{2} < \pi$  на экстремали  $y_0(x) \equiv 0$  реализуется сильный максимум функционала;

б) в случае  $a = \frac{5\pi}{4} > \pi$  функция  $y_0(x) \equiv 0$  также является единственной экстремалью в рассматриваемой задаче, причем функция Вейерштрасса сохраняет знак на этой кривой, однако экстремум на ней не достигается;

в) в случае  $a = \pi$  экстремаль определяется не единственным образом.

*Решение.* Уравнение Эйлера имеет вид  $y'' + y = 0$ . Его общее решение есть  $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ . Граничным условиям  $y(0)=0$ ,  $y(a)=0$ , как в случае а), так и в случае б) удовлетворяет единственная функция  $y_0(x) \equiv 0$ .

а) Если  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , то экстремаль  $y_0(x) \equiv 0$  может быть включена, например, в центральное поле экстремалей  $y = C \sin x$ .

Функция Вейерштрасса

$$E(x, y, p, y') = y^2 - y'^2 - (y^2 - p^2) + (y' - p)2p = -(y' - p)^2 \leq 0$$

при любых  $y, y'$ , т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой  $y_0(x) \equiv 0$ . Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль  $y_0(x) \equiv 0$  реализует сильный (и слабый) максимум.

б) Если  $x \in [0, \frac{5\pi}{4}]$ , то функция Вейерштрасса  $E(x, y, p, y') = -(y' - p)^2 \leq 0$  также сохраняет знак в сильной окрестности кривой  $y_0(x) \equiv 0$ . Заметим, что  $V[y \equiv 0] = 0$  и докажем, что на функции  $y_0(x) \equiv 0$  не достигается слабый (следовательно, и сильный) экстремум.

Рассмотрим последовательность  $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{4}{5}x$ . Ясно, что при достаточно больших  $n$  выполнено  $\|\varphi_n - y_0\|_{C^1[0, \frac{4\pi}{5}]} = \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{1}{n} \sin \frac{4x}{5} \right| + \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{4}{5n} \cos \frac{4x}{5} \right| \leq r$ , т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности  $y_0(x) \equiv 0$ . Однако

$$V[\varphi_n] = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{4x}{5} dx - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{16}{25n^2} \cos^2 \frac{4x}{5} dx = \frac{9}{25n^2} \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \cos^2 \frac{4x}{5} dx > 0 = V[0],$$

следовательно, на функции  $y_0(x) \equiv 0$  слабый (и сильный) максимум не достигается.

Рассмотрим последовательность  $\psi_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin \frac{4n}{5}x$ . Ясно, что при достаточно больших  $n$  выполнено  $\|\psi_n - y_0\|_{C^1[0, \frac{4\pi}{5}]} = \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{1}{n^2} \sin \frac{4nx}{5} \right| + \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{4}{5n} \cos \frac{4nx}{5} \right| \leq r$ , т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности  $y_0(x) \equiv 0$ .

Однако, при достаточно больших  $n$

$$V[\psi_n] = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{n^4} \sin^2 \frac{4nx}{5} dx - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{16}{25n^2} \cos^2 \frac{4nx}{5} dx = \frac{5\pi}{8} \left( \frac{1}{n^4} - \frac{16}{25n^2} \right) < 0 = V[0].$$

Следовательно, на функции  $y_0(x) \equiv 0$  минимум также не достигается.

Причина указанного явления состоит в том, что экстремаль  $y_0(x) \equiv 0$  нельзя включить в поле экстремалей при  $x \in [0, \frac{5\pi}{4}]$ , так как все решения уравнения Эйлера  $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ , удовлетворяющие одному из граничных условий  $y(0)=0$  или  $y(\frac{5\pi}{4})=0$ , обращаются в ноль одновременно еще в одной точке  $x_0 \in [0, \frac{5\pi}{4}]$ . Например, если потребовать  $y(0)=0$ , то все кривые семейства  $y = C \sin x$  обращаются в ноль при  $x_0 = \pi \in [0, \frac{5\pi}{4}]$ .

в) В случае  $a=\pi$  уравнение Эйлера  $y'' + y = 0$  имеет семейство решений  $y = C \sin x$ , удовлетворяющих граничным условиям  $y(0)=0$ ,  $y(\pi)=0$ , следовательно, экстремаль определяется не единственным образом. Легко проверить, что в этом случае на любой функции семейства  $y = C \sin x$  выполнено  $V[y] = \int_0^\pi (y^2 - y'^2) dx = 0$ .

**Пример 8.7.** Пусть тело перемещается по кривой  $y = y(x)$  со скоростью  $\vec{v}$  такой, что  $|\vec{v}| = v(x, y) = y$ . Какова должна быть траектория его движения, чтобы тело попало из точки  $y(a) = A$  в точку  $y(b) = B$  за минимальное время?

**Решение.** Время, необходимое для перемещения из точки  $(a, y(a))$  в точку  $(b, y(b))$  по заданной кривой  $y = y(x)$ , определяется функционалом  $t = \int_a^b \frac{ds}{v(x, y)} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \equiv V[y]$ .

Таким образом, решение поставленной задачи дается экстремальми функционала  $V[y]$  при условиях  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

Уравнение Эйлера в рассматриваемом случае  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{y'y'} y'' - F_{y'y} y' = 0$ .

Умножая на  $y'$ , получим  $\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$ , и найдем первый интеграл

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1. \quad \text{Положим} \quad y' = \operatorname{tg} t, \quad \text{тогда} \quad y = \frac{\cos t}{C_1},$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \operatorname{ctg} t dy = \frac{\cos t dt}{C_1}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\sin t}{C_1} + C_2. \quad \text{Исключив параметр } t, \text{ получим}$$

$$(x - C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}, \text{ т.е. экстремальми задачи являются окружности с центрами на оси } x.$$

Итак, искомая траектория движения тела - дуга окружности с центром на оси  $x$ , соединяющая точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ . Легко видеть, что такая окружность определяется единственным образом при заданных дополнительных условиях  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

## Задачи для самостоятельного решения

Найти вариацию функционала

$$8.1 \quad V[y] = \int_a^b y y' dx.$$

$$8.2 \quad V[y] = \int_a^b (x + y) dx.$$

$$8.3 \quad V[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2) dx.$$

$$8.4 \quad V[y] = \int_0^\pi y' \sin y dx.$$

Исследовать на экстремум функционалы в задаче с закрепленными концами (найти экстремали и проверить достаточные условия каким либо способом):

$$8.5 \quad V[y] = \int_0^1 e^x \left( y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

$$8.6 \quad V[y] = \int_0^1 e^y y'^2 dx \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 4.$$

$$8.7 \quad V[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

$$8.8 \quad V[y] = \int_0^a \frac{dx}{y'} \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0, b > 0).$$

$$8.9 \quad V[y] = \int_0^1 (1+x) y'^2 dx \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$8.10 \quad V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2) dx \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$8.11 \quad V[y] = \int_{-1}^2 y'(1+x^2 y') dx \quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

$$8.12 \quad V[y] = \int_{-1}^1 (y'^3 + y'^2) dx \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 3.$$

$$8.13 \quad V[y] = \int_1^2 (x y'^4 - 2 y y'^3) dx \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

$$8.14 \quad V[y] = \int_0^a (1 - e^{-y'^2}) dx \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0).$$

$$8.15 \quad \text{Найти семейство экстремалей функционала } V[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx, \quad -\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}.$$

8.16 Среди всех кривых, соединяющих точки  $(-1, ch1)$  и  $(1, ch1)$ , определить ту, которая при вращении вокруг оси  $Ox$  образует поверхность наименьшей площади.

## Ответы к задачам

$$8.1 \quad \delta V = \int_a^b (y'h + yh')dx \quad (\delta y = h(x)).$$

$$8.2 \quad \delta V = \int_a^b h(x)dx \quad (\delta y = h(x)).$$

$$8.3 \quad \delta V = 2 \int_a^b (yh - y'h')dx \quad (\delta y = h(x)).$$

$$8.4 \quad \delta V = \int_0^\pi (y' \cos y \cdot h + \sin y \cdot h')dx \quad (\delta y = h(x)).$$

8.5 Экстремаль  $y(x) = e^x$  реализует сильный (и слабый) минимум.

8.6 Экстремаль  $y(x) = 2 \ln(x+1)$  реализует сильный (и слабый) минимум.

8.7 Экстремаль  $y(x) = x^2$  реализует слабый минимум.

8.8 Экстремаль  $y(x) = \frac{b}{a}x$  реализует слабый минимум.

8.9 Экстремаль  $y(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$  реализует сильный (и слабый) минимум.

8.10 Экстремаль  $y(x) = \sin x + \cos x$  реализует сильный (и слабый) максимум.

8.11 На непрерывных кривых экстремум не достигается.

8.12 Экстремаль  $y(x) = 2x + 1$  реализует слабый минимум.

8.13 Экстремаль  $y(x) = x - 1$  реализует слабый минимум.

8.14 На экстремали  $y(x) = \frac{b}{a}x$ : при  $|b| < \frac{a}{\sqrt{2}}$  достигается слабый минимум;

при  $|b| > \frac{a}{\sqrt{2}}$  - слабый максимум; при  $|b| = \frac{a}{\sqrt{2}}$  - экстремума нет.

8.15 Окружности  $x^2 + (y - C_1)^2 = C_2^2$ .

8.16  $y(x) = ch x$ .

## ТЕМА 9

### *Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.*

#### Основные определения и теоремы

Рассмотрим функционал  $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ , заданный на кривых  $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$ ,

граничные точки которых  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  в свою очередь лежат на фиксированных гладких кривых  $y = \varphi(x)$ ,  $y = \psi(x)$ , так что  $y_0 = \varphi(x_0)$ ,  $y_1 = \psi(x_1)$ .

Задача с подвижными границами ставится так: среди всех функций  $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$ , графики которых соединяют точки двух данных кривых  $y = \varphi(x)$  и  $y = \psi(x)$ , найти ту, которая доставляет экстремум функционалу  $V[y]$ . Отметим, что абсциссы  $x_0$  и  $x_1$  точек  $A$  и  $B$  заранее не известны, и также подлежат определению.

**Необходимые условия экстремума.** Для того, чтобы функция  $y = \tilde{y}(x)$  доставляла экстремум функционалу  $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$  среди всех кривых  $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$ , соединяющих точки двух заданных линий  $y = \varphi(x)$ ,  $y = \psi(x)$ , необходимо, чтобы:

- 1) кривая  $y = \tilde{y}(x)$  была решением уравнения Эйлера для функционала  $V[y]$  (являлась экстремалью),
- 2) в точках  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$  пересечения экстремали  $y = \tilde{y}(x)$  с кривыми  $y = \varphi(x)$  и  $y = \psi(x)$  выполнялись условия трансверсальности

$$[F + (\varphi' - \tilde{y}') F_{y'}]_{x=x_0} = 0,$$

$$[F + (\psi' - \tilde{y}') F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

Условия трансверсальности устанавливают связь между угловыми коэффициентами кривых  $\tilde{y}'$  и  $\varphi'$ , а также  $\tilde{y}'$  и  $\psi'$  в граничных точках  $A$  и  $B$ .

Для определения четырех параметров -  $C_1, C_2$  из общего решения уравнения Эйлера и значений  $x_0, x_1$  (координат концов экстремали) - два условия трансверсальности нужно дополнить двумя естественными условиями пересечения заданных кривых и искомой экстремали  $\tilde{y}(x_0) = \varphi(x_0)$ ,  $\tilde{y}(x_1) = \psi(x_1)$ .

**Замечание 1.** Если граничная точка (пусть точка  $A$ ) может перемещаться только по горизонтальной прямой  $y = x_0$  (т.е.  $\varphi' = 0$ ), то условие трансверсальности в точке  $A(x_0, y_0)$  принимает вид  $[F - y' F_{y'}]_{x=x_0} = 0$ .

**Замечание 2.** Если граничная точка (например, точка  $B$ ) может перемещаться только по вертикальной прямой  $x = x_1$  (т.е.  $\psi' = \infty$ ), то такая задача называется задачей со свободным концом, и условие трансверсальности при  $x = x_1$  в этом случае принимает вид  $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$ .

## Примеры решения задач

**Пример 9.1.** Показать, что если в задаче об экстремуме функционала

$$V[y] = \int_a^{x_0=B[y]} A(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx$$

с левым закрепленным и правым подвижным концами функция  $A(x, y) \neq 0$  дифференцируема, то условие трансверсальности переходит в условие ортогональности.

**Решение.** Условие трансверсальности  $F + (\varphi' - y')F_{y'} = 0$  при  $x = x_0 = B[y]$  в данной задаче имеет вид  $A(x, y) \sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y') \cdot \frac{A(x, y) y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$  или  $\frac{A(x, y)(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ . Так

как  $A(x, y) \neq 0$ , то  $1 + y'\varphi'|_{x=x_0} = 0$  или  $y'(x_0) = -\frac{1}{\varphi'(x_0)}$ , что и требовалось.

Итак, условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.

**Пример 9.2.** Исследовать на экстремум функционал  $V[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$  при условии, что левый конец закреплен  $y(0)=0$ , а правый  $(x_1, y_1)$  может перемещаться вдоль заданной прямой  $y = x - 5$ .

**Решение.** Функция  $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$  не зависит явно от  $x$ . Поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл  $F - y'F_{y'} = C$ , т.е.  $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = C$ , или  $Cy\sqrt{1+y'^2} = 1$ .

Положим  $y' = \operatorname{tg} t$ . Тогда  $y = C_1 \cos t$ , а  $dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{C_1 \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = -C_1 \cos t dt$ , откуда  $x = -C_1 \sin t + C_2$ .

Исключая параметр  $t$ , получаем уравнение семейства окружностей  $(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$  с центрами на оси  $x$ . Из условия  $y(0)=0$  найдем  $C_1 = C_2 = C$  и  $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ .

Константа  $C$  может быть определена из условия трансверсальности, которое для данного функционала совпадает с условием ортогональности (пример 9.1) кривой  $y = y(x)$  семейства  $(x - C)^2 + y^2 = C^2$  и прямой  $y = x - 5$  в точке их пересечения  $(x_1, y_1)$ . В нашем случае  $\varphi(x) = x - 5$ ,  $\varphi' = 1$ , поэтому из  $1 + y'\varphi'|_{x=x_1} = 0$  вытекает  $y'|_{x=x_1} = -1$ .

Дифференцируя семейство решений уравнения Эйлера, получим  $yy' = C - x$ . В точке пересечения кривых  $(x_1, y_1)$  имеем  $\underbrace{y(x_1)}_{=y_1} \cdot \underbrace{y'(x_1)}_{=-1} = C - x_1$ , поэтому  $-y_1 = C - x_1$  и  $y_1 = x_1 - 5$ ,

откуда  $C = 5$  и искомая экстремаль дается формулой  $y = \pm \sqrt{10x - x^2}$ .

**Замечание.** Этот результат можно получить и из геометрических соображений. Условие ортогональности прямой  $y = x - 5$  и окружности  $(x - C)^2 + y^2 = C^2$  в точке их пересечения означает, что центр окружности  $(C, 0)$  лежит на этой прямой. Следовательно, центр окружности есть точка пересечения прямой  $y = x - 5$  с осью  $x$ , т.е.  $C = 5$ .

**Пример 9.3.** Среди кривых, соединяющих точки прямой  $2y + 2x + 3 = 0$  и параболы  $x^2 = 2y$ , найти ту, которая имеет наименьшую длину.

**Решение.** Введем обозначения:  $y = \varphi(x) \equiv \frac{1}{2}x^2$  - уравнение параболы,  $y = \psi(x) \equiv -x - \frac{3}{2}$  - уравнение прямой. Пусть точка с координатами  $(x_1, y_1)$  находится на параболе, т.е.  $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$ , а точка  $(x_2, y_2)$  - на прямой, т.е.  $y_2 = -x_2 - \frac{3}{2}$ . Длина дуги кривой  $y = y(x)$ , соединяющей точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , определяется функционалом

$$V[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad \text{Таким образом, решение поставленной задачи дается}$$

экстремалью задачи с подвижной границей для функционала  $V[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$  с условиями  $y(x_1) = y_1 = \varphi(x_1)$ ,  $y(x_2) = y_2 = \psi(x_2)$ .

Уравнение Эйлера  $y'' = 0$  имеет общее решение  $y(x) = \alpha x + \beta$ . Для определения постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ , а также координат концов дуги экстремали получим следующие условия в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ :

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta, & y_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \\ \sqrt{1 + y'^2(x_1)} + [\underbrace{\varphi'(x_1)}_{=x_1} - \underbrace{y'(x_1)}_{=\alpha}] \frac{y'(x_1)}{\sqrt{1 + y'^2(x_1)}} = 0, \\ y_2 = \alpha x_2 + \beta, & y_2 = -x_2 - \frac{3}{2} \\ \sqrt{1 + y'^2(x_2)} + [\underbrace{\varphi'(x_2)}_{=-1} - \underbrace{y'(x_2)}_{=\alpha}] \frac{y'(x_2)}{\sqrt{1 + y'^2(x_2)}} = 0 \end{cases}$$

Во второй и четвертой строках записаны условия трансверсальности  $F + (\varphi' - y')F_{y'} = 0$ , где  $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ , в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Легко видеть, что они совпадают с условиями ортогональности  $y'(x_{1,2}) \cdot \varphi'(x_{1,2}) + 1 = 0$ .

Решая систему, найдем  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $y_1 = \frac{1}{2}$ ,  $y_2 = 0$ , и экстремаль  $y(x) = x + \frac{3}{2}$ .

**Замечание.** Длина дуги полученной экстремали  $l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \sqrt{1 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$  дает

минимальное расстояние от прямой до параболы. Этот результат легко получить и из геометрических соображений.

**Пример 9.4.** Найти экстремали функционала  $V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2) dx$  с условием  $y(0) = 1$  (задача со свободным правым концом при  $x = \frac{\pi}{4}$ ).

**Решение.** Граничное условие при  $x = \frac{\pi}{4}$  следует поставить так:  $F_{y'} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2y' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$ .

Экстремали в данной задаче находятся из условий 
$$\begin{cases} y'' + y = 0 & (\text{уравнение Эйлера}) \\ y(0) = 1, & y' \left( \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases},$$

откуда получаем единственное решение  $y(x) = \sin x + \cos x$ .

### Задачи для самостоятельного решения

Найти экстремали и значение  $\xi$  в следующих задачах с подвижной границей:

9.1  $V[y] = \int_0^{\xi} y'^2 dx$   $y(0) = 0, \quad y(\xi) = -\xi - 1.$

9.2  $V[y] = \int_0^{\xi} y'^2 dx$   $y(0) = 0, \quad y(\xi) = \frac{2}{1-\xi}.$

9.3  $V[y] = \int_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2} dx$   $y(0) = 0, \quad y(\xi) = \frac{1}{\xi^2}.$

9.4  $V[y] = \int_0^{\xi} (y'^2 + x^2) dx$   $y(0) = 0, \quad y(\xi) = 1 \quad (\xi > 0).$

9.5  $V[y] = \int_0^{\xi} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$   $y(0) = 1, \quad y(\xi) = \xi - 1.$

9.6 Найти минимальное расстояние от точки  $M_0(-1, 5)$  до параболы  $x = y^2$ .

9.7 Найти минимальное расстояние от точки  $M_0(1, 0)$  до эллипса  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .

9.8 Найти минимальное расстояние между точками параболы  $y = x^2$  и прямой  $x - y = 5$ .

9.9 Найти минимальное расстояние от прямой  $x + y = 4$  до окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

Найти экстремали в задачах со свободными концами:

9.10  $V[y] = \int_0^2 (2xy + y'^2) dx$   $y(0) = 0.$

9.11  $V[y] = \int_0^1 (2y + 6y' + y'^2) dx$   $y(0) = 0.$

9.12  $V[y] = \int_0^1 (2yy' + y'^2) dx.$



$$9.13 \quad V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4y^2 + y'^2 + 2y \cos x) dx.$$

$$9.14 \quad V[y] = \int_1^2 (2y + yy' + x^2 y'^2) dx.$$

$$9.15 \quad V[y] = \int_1^2 (2y - yy' + xy'^2) dx$$

### Ответы к задачам

$$9.1 \quad y(x) = -2x, \quad \xi = 1.$$

$$9.2 \quad y(x) = 9x, \quad \xi = \frac{1}{3}.$$

$$9.3 \quad y(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad \xi = \sqrt[6]{2}.$$

$$9.4 \quad y(x) = x, \quad \xi = 1.$$

$$9.5 \quad y(x) = \sqrt{1 + 2x - x^2}, \quad \xi = 2.$$

$$9.6 \quad 2\sqrt{5}.$$

$$9.7 \quad \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \text{экстремаль} \quad y(x) = 2x - 2.$$

$$9.8 \quad \frac{19\sqrt{2}}{8}, \quad \text{экстремаль} \quad y(x) = -x + \frac{3}{4}.$$

$$9.9 \quad 2\sqrt{2} - 1.$$

$$9.10 \quad y(x) = \frac{x^3}{6} - 2x.$$

$$9.11 \quad y(x) = \frac{x^2}{2} - 4x.$$

$$9.12 \quad y(x) \equiv 0.$$

$$9.13 \quad y(x) = -\frac{1}{5} \left( \frac{ch 2x}{2 sh \pi} + \cos x \right).$$

$$9.14 \quad y(x) = 2 + \ln(4x) + \frac{4 + \ln 4}{x}.$$

$$9.15 \quad y(x) = x + 1 + \frac{2 + \ln x}{\ln 2}.$$

## ТЕМА 10

### Условный экстремум. Задача Лагранжа. Изопериметрические задачи.

#### Основные определения и теоремы

В вариационных задачах на условный экстремум множество функций, на которых исследуется функционал, подчиняется дополнительным условиям связи.

Рассмотрим функционал 
$$V[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx \quad (1)$$

с граничными условиями 
$$\begin{aligned} y(a) &= y_0, & y(b) &= y_1, \\ z(a) &= z_0, & z(b) &= z_1. \end{aligned} \quad (2)$$

и дополнительным условием связи вида 
$$\Phi(x, y, z, y', z') = 0. \quad (3)$$

Среди всех кривых  $y(x), z(x) \in C^{(1)}[a, b]$ , удовлетворяющих граничным условиям (2), а также условию связи (3), требуется определить те, на которых реализуется экстремум функционала  $V[y, z]$ . Сформулированную проблему иногда называют *задачей Лагранжа*.

Связи типа  $\Phi(x, y, z) = 0$  (т.е. не зависящие от производных) в механике называются голономными, а связи вида  $\Phi(x, y, z, y', z') = 0$  (зависящие от производных) называются неголономными.

#### Необходимые условия экстремума (задача Лагранжа).

Пусть

- 1) функции  $y(x), z(x)$  реализуют экстремум функционала  $V[y, z]$  на множестве пар функций, удовлетворяющий граничным условиям (2) и условию связи (3);
- 2) функции  $F, \Phi$  трижды дифференцируемы;
- 3)  $y(x)$  и  $z(x)$  дважды дифференцируемы и  $\Phi_z'^2 + \Phi_y'^2 \neq 0$ .

Тогда существует дифференцируемая функция  $\lambda(x)$  такая, что функции  $y(x), z(x)$ , а также  $\lambda(x)$  удовлетворяют системе уравнений Эйлера, записанной для вспомогательного

функционала 
$$\int_a^b H(x, y, z, y', z') dx, \quad \text{где} \quad H \equiv F(x, y, z, y', z') + \lambda(x)\Phi(x, y, z, y', z')$$

(конструкция, аналогичная функции Лагранжа в задаче об условном экстремуме функций нескольких переменных):

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0, \quad H_z - \frac{d}{dx} H_{z'} = 0.$$

*Замечание 1.* В случае голономных связей (не зависящих от производных) условие 3) теоремы отсутствует.

*Замечание 2.* Естественно, что приведенное в исследуемом функционале количество функций - две, является минимально необходимым для постановки задачи об условном экстремуме. В общем случае, количество связей должно быть *меньше* количества функций в функционале  $V$ .

*Изопериметрическая задача.* Условия связи могут быть заданы не в виде функций, а в виде дополнительных функционалов. Важнейшим примером таких задач является так называемая изопериметрическая задача, которая ставится следующим образом:

среди всех функций  $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$  найти ту, которая доставляет экстремум функционалу  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ , с граничными условиями  $y(a) = y_0$ ,  $y(b) = y_1$  при наличии связи  $J[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx = l$ , где  $l$  - заданная постоянная.

Изопериметрическая задача сводится к задаче Лагранжа введением функции  $z(x) = \int_a^x G(x, y, y') dx$ . Тогда очевидно, что  $z(a) = 0$ ,  $z(b) = l$ ,  $z' = G(x, y, y')$ , и рассматриваемая изопериметрическая задача приведена к виду (1)-(3), где  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ , граничные условия  $y(a) = y_0$ ,  $y(b) = y_1$ ,  $z(a) = 0$ ,  $z(b) = l$ , а соотношение  $\Phi(x, y, z, y', z') \equiv G(x, y, y') - z' = 0$  играет роль неголономной связи типа (3) (в данном случае функция  $z(x)$  входит только в условие связи).

**Необходимые условия экстремума (изопериметрическая задача).** Пусть

- 1) на функции  $y(x)$  достигается экстремум функционала  $V[y]$  при сформулированных граничных условиях и условиях связи;
- 2) функция  $F$  трижды дифференцируема;
- 3)  $y(x)$  дважды дифференцируема и не является экстремалью функционала  $J[y]$ .

Тогда существует постоянная  $\lambda$  такая, что функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера для вспомогательного функционала  $\int_a^b H(x, y, y') dx$ , где обозначено  $F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y') \equiv H(x, y, y')$ .

*Замечание.* Если  $y(x)$  - экстремаль функционала  $J[y]$ , то  $G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} = 0$ , т.е. уравнение Эйлера для функционала  $\int_a^b H(x, y, y') dx$  совпадает с обычным уравнением Эйлера  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$  для функционала  $V[y]$ .

### Примеры решения задач

*Пример 10.1.* Найти экстремали в изопериметрической задаче для функционала

$$V[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2] dx$$

с дополнительными условиями  $J[y] = \int_a^b \rho(x)y^2 dx = 1$ ,  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 0$ ,

где  $p(x)$  непрерывно дифференцируемая,  $q(x)$  и  $\rho(x)$  непрерывные на  $[a, b]$  функции, причем  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

*Решение.* В принятых выше обозначениях  $F(x, y, y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2$ ,  $G(x, y, y') = \rho(x)y^2$ ,  $H(x, y, y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda \rho(x)y^2$ , поэтому вспомогательный

функционал имеет вид  $V[y] + \lambda J[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda \rho(x)y^2] dx$ .

Уравнение Эйлера  $\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y - \lambda \rho(x)y = 0$  с краевыми условиями  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 0$ , очевидно, имеет решение  $y(x) \equiv 0$ , которое, однако, не удовлетворяет изопериметрическому условию  $\int_a^b \rho(x)y^2 dx = 1$ . Поэтому экстремали следует определить как решения задачи Штурма-Лиувилля, т.е. экстремали в данном случае являются собственные функции  $y_n(x)$ , отвечающие собственным значениям  $\lambda_n$ , причем  $\lambda_n < 0$ .

Умножив уравнение Эйлера на функцию  $y_n(x)$  и проинтегрировав по отрезку  $[a, b]$ , с учетом дополнительных условий получим

$$\underbrace{p(x)y'_n(x)y_n(x)}_{=0} \Big|_a^b - \int_a^b p(x)y_n'^2 dx - \int_a^b q(x)y_n^2 dx = \lambda_n \underbrace{\int_a^b \rho(x)y_n^2 dx}_{=1},$$

т.е. значение функционала  $V[y]$  на найденных экстремалих  $V[y_n(x)] = -\lambda_n$ .

Итак, экстремали рассматриваемой изопериметрической задачи являются ортонормированные с весом  $\rho(x)$  собственные функции  $y_n(x)$  задачи Штурма-Лиувилля; при этом соответствующие им собственные значения  $\lambda_n$  представляют собой экстремальные значения функционала  $-V[y]$ .

**Пример 10.2.** Найти тело вращения наименьшего объема с заданной площадью осевого сечения.

**Решение.** Пусть ось  $Ox$  выбранной системы координат совпадает с осью вращения, тогда для ответа на вопрос задачи нужно найти минимум функционала  $V[y] = \pi \int_a^b y^2 dx$  при

условиях  $2 \int_a^b y dx = S$ ,  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ . Уравнение Эйлера для функционала Лагранжа

$V[y] = \int_a^b (y^2 + \lambda y) dx$  в рассматриваемом случае не дифференциальное, а алгебраическое

$2y + \lambda = 0$ , и его решение  $y(x) = -\frac{\lambda}{2}$  существует лишь, если  $A = B = -\frac{\lambda}{2}$  и  $-\lambda(b-a) = S$ , т.е. искомым телом является цилиндр.

**Пример 10.3.** На поверхности цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$  найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки  $(a, 0, 0)$  и  $(0, a, h)$ , и расстояние между этими точками, измеренное по поверхности цилиндра.

**Решение.** Зададим искомую кривую в параметрической форме  $L: \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$ , тогда длина дуги этой кривой дается функционалом

$l = V[x, y, z] = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ . Конкретный способ выбора параметра  $t$  будет указан

ниже.

Для решения задачи требуется найти экстремали функционала  $V[x, y, z] = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$  в задаче Лагранжа с голономной связью  $\varphi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$  и граничными условиями

$$\begin{cases} x(\alpha) = a, & y(\alpha) = 0, & z(\alpha) = 0 \\ x(\beta) = 0, & y(\beta) = a, & z(\beta) = h \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал  $\int_{\alpha}^{\beta} \left[ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda(t)(x^2 + y^2 - a^2) \right] dt$ , тогда

система уравнений Эйлера выглядит так:

$$\begin{cases} 2\lambda(t) \cdot x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ 2\lambda(t) \cdot y - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \end{cases}.$$

Выберем в качестве  $t$  естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки  $(a, 0, 0)$ , тогда  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$  и уравнения Эйлера примут более простой вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\lambda(t) \cdot x \\ \ddot{y} = 2\lambda(t) \cdot y \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}.$$

Отсюда сразу найдем  $\dot{z} = C$ , где  $|C| < 1$ .

Далее, дифференцируя дважды уравнение поверхности  $x^2 + y^2 = a^2$ , получим  $x\ddot{x} + y\ddot{y} + \underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}_{=1-\dot{z}^2} = 0$ , откуда  $x\ddot{x} + y\ddot{y} = \dot{z}^2 - 1 = C^2 - 1$ . Подставляя это соотношение в первые

два уравнения последней системы, найдем  $C^2 - 1 = 2\lambda(t) \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=a^2} \Rightarrow 2\lambda(t) = \frac{C^2 - 1}{a^2}$ .

Теперь уравнения Эйлера легко интегрируются и, так как  $|C| < 1$ , т.е.  $C^2 - 1 < 0$ , то их решение есть  $x(t) = A_1 \sin \gamma t + A_2 \cos \gamma t$ ,  $y(t) = B_1 \sin \gamma t + B_2 \cos \gamma t$ ,  $z(t) = Ct + C_1$  - винтовая линия (здесь введено обозначение  $\gamma = \sqrt{\frac{1-C^2}{a^2}}$ ).

Дополнительные условия при выбранном способе параметризации кривой следует поставить так:

$$\begin{cases} x(0) = a, & y(0) = 0, & z(0) = 0 \\ x(l) = 0, & y(l) = a, & z(l) = h \end{cases}.$$

Условия при  $t = 0$  с учетом  $x^2 + y^2 = a^2$  дают  $x(t) = a \cos \gamma t$ ,  $y(t) = a \sin \gamma t$ ,  $z(t) = Ct$ ; при  $t = l$  имеем  $\cos \gamma l = 0$ ,  $\sin \gamma l = 1$ ,  $C = \frac{h}{l}$ ,

откуда следует  $\gamma = \frac{\pi}{2l}$ , и уравнения экстремали принимают вид

$$x(t) = a \cos \frac{\pi}{2l} t, \quad y(t) = a \sin \frac{\pi}{2l} t, \quad z(t) = \frac{h}{l} t.$$

Подставив полученные формулы в соотношение  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$ , определявшее выбор параметризации, найдем  $\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 = 1$ , откуда  $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$ . Итак, кратчайшее расстояние между точками  $(a, 0, 0)$  и  $(0, a, h)$ , измеренное на поверхности цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ , равно  $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$ .

*Замечание.* Эту формулу можно вывести и из простых геометрических соображений: если "разрезать" поверхность цилиндра по образующей, проходящей через точку  $(a, 0)$  и "развернуть" ее, то получим прямоугольник со сторонами длиной  $\frac{\pi a}{2}$  и  $h$ , диагональ которого равна  $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$  и дает искомое минимальное расстояние между заданными точками.

*Пример 10.4.* На поверхности  $15x - 7y + z = 22$  найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки  $A(1, -1, 0)$  и  $B(2, 1, -1)$ , и расстояние между этими точками, измеренное по данной поверхности.

*Решение.* Зададим искомую кривую в параметрической форме  $L: \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$ ,  $0 \leq t \leq \alpha$ , где значение  $\alpha$  будет определено позднее. Тогда длина дуги кривой дается функционалом  $l = V[x, y, z] = \int_A^B dl = \int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ .

Для решения задачи нужно найти экстремали функционала  $V[x, y, z] = \int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$  в задаче Лагранжа с голономной связью  $\varphi(x, y, z) \equiv 15x - 7y + z - 22 = 0$  и граничными условиями

$$\begin{cases} x(0) = 1, & y(0) = -1, & z(0) = 0 \\ x(\alpha) = 2, & y(\alpha) = 1, & z(\alpha) = -1 \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал  $\int_0^\alpha \left[ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda(t)(15x - 7y + z - 22) \right] dt$ ,

система уравнений Эйлера для которого выглядит так:

$$\begin{cases} 15\lambda(t) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ -7\lambda(t) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ \lambda(t) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \end{cases}.$$

Как и в предыдущем примере выберем в качестве  $t$  естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки  $A$ , тогда  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$  и  $\alpha = l$ , а уравнения Эйлера примут вид:  $\ddot{x} = 15\lambda(t)$ ,  $\ddot{y} = -7\lambda(t)$ ,  $\ddot{z} = \lambda(t)$ .

Продифференцировав дважды уравнение поверхности  $15x - 7y + z = 22$ , получим  $15\ddot{x} - 7\ddot{y} + \ddot{z} = 0$ , откуда, учитывая уравнения Эйлера, найдем  $\lambda(t) = 0$ . Поэтому  $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ , и экстремальными задачи являются прямые.

Дополнительное условие в точке  $A(1, -1, 0)$  и способ выбора параметра, т.е. соотношение  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$ , определяют искомую кривую в параметрической форме  $x(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}t$ ,  $y(t) = -1 + \frac{2}{\sqrt{6}}t$ ,  $z(t) = -\frac{1}{\sqrt{6}}t$ , а условие в точке  $B(2, 1, -1)$  (т.е. при  $t = \alpha$ ) дает расстояние между точками:  $l = \alpha = \sqrt{6}$ .

*Замечание.* Результат, полученный нами средствами вариационного исчисления, был очевиден заранее из геометрических соображений, так как заданная поверхность  $15x - 7y + z = 22$  - плоскость, следовательно, минимальное расстояние между любыми двумя точками на ней есть длина отрезка, соединяющего эти точки.

*Пример 10.5. (задача Чаплыгина).* Определить траекторию, по которой должен двигаться самолет с постоянной относительно воздуха скоростью  $\vec{u}: |\vec{u}| = u = \text{const}$ , чтобы за фиксированное время  $T$  облететь территорию максимальной площади, если скорость ветра  $\vec{v}$  постоянна и  $|\vec{v}| = v < u$ .

*Решение.* Выберем систему координат так, что ось  $Ox$  направлена вдоль скорости ветра. Пусть искомая траектория задана в параметрической форме  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , тогда скорость самолета в этой системе координат  $\vec{V} \equiv \{\dot{x}(t), \dot{y}(t)\} = \vec{u} + \vec{v}$  и имеет место соотношение  $(\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 = u^2$ .

Задача состоит в нахождении кривой, реализующей минимум функционала площади  $S[x, y] = \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$  при наличии неголономной связи  $(\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0$ . Граничные условия:  $x(0) = x(T) = x_0$ ,  $y(0) = y(T) = y_0$ , т.е. самолет вылетает из некоторой точки и в нее же возвращается (выбор начальной точки будет указан ниже).

$$\text{Функционал Лагранжа} \quad L[x, y] = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda(t) ((\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2) \right] dt$$

$$\text{порождает систему уравнений Эйлера} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{y} - \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} y + 2\lambda(t)(\dot{x} - v) \right) = 0 \\ -\frac{1}{2} \dot{x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} x + 2\lambda(t)\dot{y} \right) = 0 \end{cases},$$

$$\text{интегрируя которую получим} \quad \begin{cases} y - 2\lambda(t)(\dot{x} - v) = C_1 \\ x + 2\lambda(t)\dot{y} = C_2 \end{cases}.$$

Сделаем сдвиг исходной системы координат, т.е. выберем начальную точку траектории  $(x_0, y_0)$  так, что  $C_1 = C_2 = 0$ , тогда в новых координатах имеем

$$\begin{cases} y = 2\lambda(t)(\dot{x} - v) \\ x = -2\lambda(t)\dot{y} \\ (\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0 \end{cases}.$$

Далее, исключая функцию  $\lambda(t)$  из первого и второго уравнения, приведем систему к

$$\text{виду } \begin{cases} \dot{x} - v = -\frac{y\dot{y}}{x} \\ (\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0 \end{cases}, \text{ откуда } \dot{y}^2 = \frac{u^2 x^2}{x^2 + y^2}, (\dot{x} - v)^2 = \frac{u^2 y^2}{x^2 + y^2}. \text{ Учитывая, что } \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx}{dy},$$

получим дифференциальное уравнение искомой траектории  $x \frac{dx}{dy} + y = \pm \frac{v}{u} \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$\text{которое легко интегрируется, так как } \frac{x \frac{dx}{dy} + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d}{dy} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, решение задачи дается формулой  $\sqrt{x^2 + y^2} = \pm \frac{v}{u} y + C$  и представляет собой семейство эллипсов с эксцентриситетом  $\varepsilon = \frac{v}{u} < 1$ , большая ось которых перпендикулярна оси  $Ox$ , т.е. направлению ветра.

### Задачи для самостоятельного решения

10.1 Найти экстремали изопериметрической задачи для функционала  $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$  в

следующих случаях:

- а)  $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$ ,  $\int_0^1 y dx = 3$ ,  $y(0) = 1, y(1) = 6$ ;  
 б)  $V[y] = \int_0^\pi (y'^2 + x^2) dx$ ,  $\int_0^\pi y^2 dx = 1$ ,  $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ ;  
 в)  $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$ ,  $\int_0^1 (y - y'^2) dx = \frac{1}{12}$ ,  $y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{4}$ ;  
 г)  $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$ ,  $\int_0^1 y dx = 1$ ,  $\int_0^1 xy dx = 0$ ,  $y(0) = 0, y(1) = 0$ .

10.2 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала  $V[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$

с голономными связями в следующих случаях:

- а)  $V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx$ ,  $y^2 + z^2 = 1$ ,  
 $y(0) = 1, y(1) = 0, z(0) = 0, z(1) = 1$ ;  
 б)  $V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + x^3) dx$ ,  $y - 2z + 3x = 0$ ,  
 $y(0) = 2, y(1) = 1, z(0) = 1, z(1) = 2$ ;  
 в)  $V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 1) dx$ ,  $y + z = 2x^2$ ,  
 $y(0) = 0, y(1) = 2, z(0) = 0, z(1) = 0$ ;



$$\text{г) } V[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 + z^2 - y'^2 - z'^2 + \cos x) dx,$$

$$y - z = 2 \sin x,$$

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

10.3 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала  $V[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$

с неголономными связями в следующих случаях:

$$\text{а) } V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + 2z'^2 + z^2) dx, \quad y - z' = 0,$$

$$y(0) = -2, \quad y(1) = -\frac{1}{e}, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0;$$

$$\text{б) } V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx, \quad y' - z = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0;$$

$$\text{в) } V[y, z] = \int_0^{\pi} (y'^2 - z'^2) dx, \quad y' = \sin x - z,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(\pi) = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{г) } V[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - 4x^2 z^2) dx, \quad z' = 2y - 4xz, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

### Ответы к задачам

$$10.1 \quad \text{а) } y(x) = 3x^2 + 2x + 1;$$

$$\text{б) } y_k(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\text{в) } y(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4};$$

$$\text{г) } y(x) = 60x^3 - 96x^2 + 36x.$$

$$10.2 \quad \text{а) } y(x) = \cos \frac{\pi x}{2}, \quad z(x) = \sin \frac{\pi x}{2};$$

$$\text{б) } y(x) = 2 - x, \quad z(x) = 1 + x;$$

$$\text{в) } y(x) = x^2 + x, \quad z(x) = x^2 - x$$

$$\text{г) } y(x) = \cos x + \sin x, \quad z(x) = \cos x - \sin x.$$

$$10.3 \quad \text{а) } y(x) = (x-2)e^{-x}, \quad z(x) = (1-x)e^{-x};$$

б) решений нет;

$$\text{в) } y(x) = \frac{x}{2} \sin x, \quad z(x) = \frac{1}{2} (\sin x - x \cos x);$$

$$\text{г) } y(x) = \sin 2x, \quad z(x) = \cos 2x + 2x \cdot \sin 2x.$$

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. М.: КДУ, 2008.
2. Васильева А.Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2000.
4. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 2003.

### Дополнительная

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. Серия "Вся высшая математика в задачах". М.: УРСС, 2003.
5. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. Серия "Вся высшая математика в задачах". М.: УРСС, 2002.
6. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001.
7. Владимиров В.С., Вашарин А.А. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.