

Лекция №12

§6. Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.

Вернемся к задаче с закрепленными концами: найти минимум функционала

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

при условии, что

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Необходимое условие экстремума было сформулировано в §3. Получим теперь достаточное условие минимума (достаточное условие максимума получается аналогично). Конечно, можно попытаться исследовать знак производной $\left. \frac{d^2}{dt^2} V[y + th] \right|_{t=0}$ для всех допустимых $h(x)$. Здесь же мы будем использовать другой подход.

Пусть на функции $y = \bar{y}(x)$ достигается минимум функционала $V[y]$ для задачи с закрепленными концами:

$$\bar{y}(a) = A, \quad \bar{y}(b) = B.$$

Это означает, что $V[\tilde{y}] - V[\bar{y}] \geq 0$ для всех $\tilde{y}(x)$ из окрестности $\bar{y}(x)$ таких, что $\tilde{y}(a) = A$, $\tilde{y}(b) = B$. Функционал $V[\tilde{y}]$ мы можем рассматривать как криволинейный интеграл второго рода

$$V[\tilde{y}] = \int_a^b F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx$$

по кривой $\tilde{C} = \{(x, y) : y = \tilde{y}(x), x \in [a, b]\}$.

Рассмотрим кривую $\bar{C} = \{(x, y) : y = \bar{y}(x), x \in [a, b]\}$ и обозначим $V[\tilde{y}] = I(\tilde{C})$, $V[\bar{y}] = I(\bar{C})$. Нужно оценить знак выражения

$$I(\tilde{C}) - I(\bar{C}) = \int_{\tilde{C}} F(x, y, y') dx - \int_{\bar{C}} F(x, y, y') dx,$$

точнее получить условия, при которых это выражение неотрицательно. Для этой цели преобразуем разность интегралов по двум, вообще говоря, различным кривым в интеграл по одной кривой.

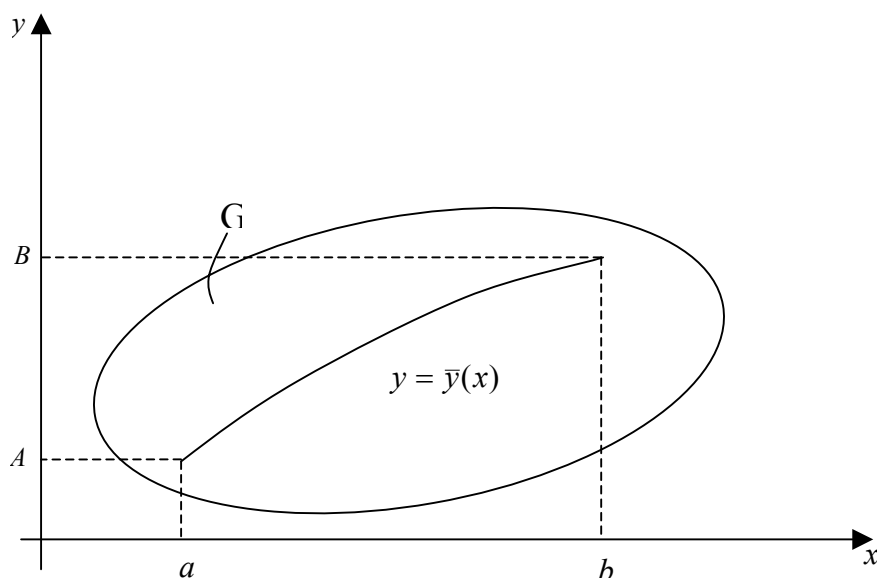
Будем считать, что функция $y = \bar{y}(x)$ содержится в центральной или собственном поле экстремалей. Напомним, что экстремалью называется решение уравнения Эйлера.

Пусть область G на плоскости (x, y) содержит кривую, заданную функцией $\bar{y}(x)$. Если через каждую точку области G проходит и при том единственная кривая, являющаяся решением уравнения Эйлера, то говорят, что множество таких экстремалей образует собственное поле.

Поле экстремалей называется центральным, если выполнены те же условия, но все экстремали пересекаются в одной точке $((a, A)$ или (b, B)).

В обоих случаях можно однозначно определить функцию $p(x, y)$: $p(x, y)$ - производная в точке x той экстремали $y(x)$, которая проходит через

точку (x, y) . В случае центрального поля функция $p(x, y)$ определена везде в области G , кроме одной из точек пересечения экстремалей (a, A) или (b, B) .



Рассмотрим интеграл

$$J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \left\{ F(x, y, p(x, y)) + \left(\frac{d}{dx} y(x) - p(x, y) \right) F_p(x, y, p(x, y)) \right\} dx$$

по кривой $\tilde{C} \subseteq G$. Заметим, что $J(\bar{C}) = I(\bar{C}) = V[\bar{C}]$, так как $\bar{y}(x)$ принадлежит полю экстремалей и, следовательно, $\frac{d}{dx} y(x) - p(x, y) = 0$ на кривой \bar{C} .

Перепишем исследуемый интеграл в виде $J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} [F(x, y, p) - pF_p] dx + F_p dy$ и заметим, что это криволинейный интеграл второго рода.

Покажем, что под знаком интеграла стоит полный дифференциал. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\frac{\partial}{\partial y} (F - pF_p) = \frac{\partial}{\partial x} F_p.$$

Поскольку $F \equiv F(x, y, p(x, y))$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_p &= F_{px} + F_{pp} p_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} (F - pF_p) &= F_y + F_p p_y - F_p p_y - p(F_{py} + F_{pp} p_y). \end{aligned}$$

Через каждую точку (x, y) области G проходит экстремаль, поэтому в каждой точке (x, y) выполняется соотношение (уравнение Эйлера)

$$\left(F_y - \frac{d}{dx} F_p(x, y, p(x, y)) \right) \Big|_{y=y(x)} = 0,$$

где $y = y(x)$ - экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера), проходящая через заданную точку (x, y) . Или

$$F_y - F_{px} - F_{py}p - F_{pp}(p_x + p_y p) = 0,$$

то есть равенство $\frac{\partial}{\partial y}(F - pF_p) = \frac{\partial}{\partial x}F_p$ выполняется.

Итак, интеграл $J(\tilde{C})$ не зависит от выбора пути интегрирования, и

$$V[\bar{y}] = J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \{F(x, y, p) + (y' - p) \cdot F_p(x, y, p)\} dx = I(\bar{C}).$$

Поэтому

$$\Delta V = I(\tilde{C}) - I(\bar{C}) = I(\tilde{C}) - J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \{F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) \cdot F_p(x, y, p)\} dx.$$

Определим теперь функцию Вейерштрасса:

$$E(x, y, y', p) \equiv F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) \cdot F_p(x, y, p).$$

Очевидно достаточное условие минимума: $E \geq 0$ в окрестности $\bar{y}(x)$. В зависимости от того, какая выбирается окрестность – слабая или сильная, мы получим слабый или сильный минимум.

Сформулируем еще раз достаточное условие сильного (слабого) минимума:

- 1) $y = \bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера;
- 2) $y = \bar{y}(x)$ может быть включена в собственное или центральное поле экстремалей;
- 3) $E(x, y, y', p) \geq 0$ в сильной (слабой) окрестности $y = \bar{y}(x)$.

В случае сильного (слабого) максимума достаточно выполнение условия $E \leq 0$.

Получим еще одно достаточное условие минимума, которое легко проверить. Будем предполагать, что $F(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируема по y' . Разложим эту функцию в ряд Тейлора в точке p (по третьему аргументу) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p) \cdot F_{y'}(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q),$$

$$q \in [p, y'] \quad \text{или} \quad q \in [y', p].$$

Тогда функция Вейерштрасса примет вид

$$E(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q).$$

Чтобы было выполнено условие $E \geq 0$, достаточно потребовать $F_{y'y'} > 0$ на экстремали $y = \bar{y}(x)$. Это условие Лежандра. Можно также требовать выполнения неравенства $F_{y'y'} \geq 0$ в (слабой или сильной) окрестности $\bar{y}(x)$. Сформулируйте сами условие Лежандра для максимума.

Рассмотрим пример. Пусть требуется исследовать на экстремум функционал

$$V[y] = \int_0^a (y')^3 dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

Из уравнения Эйлера $y'' = 0$ получаем $y = C_1 x + C_2$. Используя граничные условия, находим кривую, для которой выполняется необходимое условие экстремума:

$$y = \bar{y}(x) = \frac{b}{a} x.$$

Эта кривая может быть включена в центральное поле экстремалей – множество функций вида $y = Cx$, или собственное поле экстремалей – множество функций вида $y = \frac{b}{a} x + C$ (C – произвольная постоянная).

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x, y, y', p) = (y')^3 - p^3 - (y' - p)3p^2 = (y' - p)^2(y' + 2p)$$

и обращается в нуль при $y' = p$, $y' = -2p$.

На рассматриваемой кривой $y = \bar{y}(x) = \frac{b}{a} x$ имеем $p = \frac{b}{a} > 0$. Поэтому в слабой окрестности $\bar{y}(x)$ выполнено неравенство $E \geq 0$; в сильной окрестности это неравенство, очевидно, не выполняется. Тем самым, функция $\bar{y}(x)$ реализует слабый минимум функционала $V[y]$.

Еще легче проверить условие Лежандра:

$$F_{y'y'} = 6y' \Big|_{y=\frac{b}{a}x} = 6\frac{b}{a} > 0.$$

В заключение скажем несколько слов о численных методах в вариационном исчислении:

1) Прежде всего уравнение $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ с граничными условиями $y(a) = A$, $y(b) = B$ можно решать численными методами.

2) Можно использовать также следующий подход. Экстремум функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ ищется на множестве функций вида

$y_n = \sum_{n=1}^N \alpha_n w_n(x)$, где $w_n(x)$ – заданные функции. Задача сводится к отысканию минимума (или максимума) функции N переменных. Очевидно, что

$$\max V[y] \geq \max \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \min \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq \min V[y].$$

Можно применять и другие подходы. Из-за недостатка времени мы не можем рассмотреть их подробно. Эти методы изучаются в курсе “Численные методы”, а также в специальных курсах, посвященных численным методам решения экстремальных задач.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение центрального поля экстремалей.
2. Сформулировать определение собственного поля экстремалей.
3. Сформулировать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
4. Сформулировать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
5. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
6. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
7. Сформулировать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
8. Сформулировать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
9. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
10. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Обосновать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
2. Обосновать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
3. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
4. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
5. Обосновать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
6. Обосновать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
7. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
8. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.
9. Найти экстремали функционала $V[y] = \int_0^a (y')^3 dx$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$ и определить тип экстремума (слабый или сильный, минимум или максимум) в зависимости от значений параметров a и b .