

§7. Теорема Гильберта-Шмидта.

Будем рассматривать интегральный оператор A , ядро которого $K(x, s)$ удовлетворяет следующим условиям: $K(x, s)$ – симметрическое, непрерывное по совокупности переменных на $[a, b] \times [a, b]$ и $K(x, s) \not\equiv 0$. В соответствии с результатами предыдущего параграфа этот оператор обладает конечной или бесконечной последовательностью характеристических чисел $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, определяемых уравнением $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$.

Определение. Функция $f(x)$ называется истокопредставимой с помощью ядра $K(x, s)$, если существует непрерывная функция $g(s)$ такая, что $f(x) = \int_a^b K(x, s) g(s) ds$ или, что тоже самое, $f = Ag$ (т.е. $f \in R(A)$ - множеству значений оператора A , действующего $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$).

Любой функции $f(x) \in h[a, b]$ можно формально сопоставить ее ряд Фурье по системе функций $\varphi_k(x)$, т.е. $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$

Теорема Гильберта-Шмидта. Если функция $f(x)$ истокопредставима с помощью непрерывного симметрического ядра $K(x, s)$, то она может быть разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x), \quad \text{где} \quad f_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds,$$

причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. 1) Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$. Будем рассматривать случай, когда характеристических чисел бесконечно много (в противном случае очевидно, что ряд сходится).

Заметим, что $f_k = (f, \varphi_k) = (Ag, \varphi_k) = (g, A\varphi_k) = (g, \frac{\varphi_k}{\lambda_k}) = \frac{g_k}{\lambda_k}$. Итак, нам надо доказать равномерную и абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$.

Для доказательства применим критерий Коши равномерной сходимости. Для нас представляет интерес сумма

$$\sum_{k=n+1}^{k=n+p} \left| g_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}},$$

где n и p – произвольные натуральные числа (здесь мы использовали неравенство Коши-Буняковского для сумм вещественных чисел).

а) Из неравенства Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \leq \int_a^b g^2(s) ds$ следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2$ сходится, т.к. состоит из неотрицательных чисел, и все частичные суммы его ограничены.

б) Заметим, что $\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = \int_a^b K(x, s) \varphi_k(s) ds$, т.к. $\varphi_k(x)$ – собственная функция,

соответствующая характеристическому числу λ_k . Если фиксировать $x \in [a, b]$, то $\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$ – коэффициент Фурье ядра $K(x, s)$, и можно записать неравенство Бесселя для $K(x, s)$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right)^2 \leq \int_a^b K^2(x, s) ds \leq K_o^2 (b-a), \quad \text{где} \quad K_o = \max_{x, s \in [a, b]} |K(x, s)|.$$

В то же время, из неравенства Бесселя для функции $g(x)$ следует, что числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2$ сходится, и выполняется критерий Коши как необходимое условие его сходимости, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall p \geq 1 \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{K_o^2 (b-a)}$. Но тогда при тех же ε, N, n, p имеет

место оценка $\sum_{k=n+1}^{n+p} \left| g_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \leq \varepsilon$, т.е. выполнен критерий Коши как достаточное условие

равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \left| g_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|$.

Итак, равномерная и абсолютная сходимость ряда Фурье доказана.

2) Докажем, что ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$ сходится к функции $f(x)$. Так как ряд состоит из непрерывных функций и сходится равномерно на $[a, b]$, то его сумма – непрерывная на $[a, b]$ функция. Обозначим $\omega(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$. Надо доказать, что $\omega(x) \equiv 0$.

Докажем, что $\omega(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_i(x)$. Действительно,

$$\begin{aligned} (\omega, \varphi_i) &= \int_a^b \omega(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx = f_i - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_i(x) dx = \\ &= f_i - f_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(возможность изменения порядка интегрирования и суммирования следует из равномерной сходимости ряда).

Так как функция $\omega(x)$ ортогональна всем $\varphi_i(x)$, то (см. предыдущий параграф), $\omega(x)$ принадлежит нуль-пространству оператора A , т.е. $A\omega = 0$. Далее

$$\int_a^b \omega^2(x) dx = \int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)] \omega(x) dx = \int_a^b f(x) \omega(x) dx = (f, \omega) = (Ag, \omega) = (g, A\omega) = 0.$$

Изменение порядка интегрирования и суммирования возможно в силу доказанной выше равномерной сходимости ряда Фурье. Так как $\omega(x)$ – непрерывная функция, то $\omega(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа сформулируем без доказательства некоторые обобщения полученных результатов.

Можно рассматривать задачу в многомерном случае. Пусть Ω – замкнутая ограниченная область $\Omega \subseteq R^n$, для которой можно определить указанные ниже интегралы. Введем пространство $h[\Omega]$, состоящее из функций, непрерывных в Ω , со скалярным

произведением $(y_1, y_2) = \int_{\Omega} y_1(x) y_2(x) dx$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Рассмотрим многомерное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром $K(x, s)$

$$y(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, s) y(s) ds + f(x), \quad x, s \in \Omega.$$

Если ядро непрерывно и симметрично по переменным x, s , то все результаты, полученные выше, остаются верными и в многомерном случае.

В курсе методов математической физики рассматриваются ядра $K(x, s) = \frac{\Phi(x, s)}{|x - s|^\alpha}$,

где $\Phi(x, s)$ непрерывная в Ω по совокупности аргументов и симметрическая функция, $|x - s| = r_{xs}$ - расстояние между точками x и s в пространстве R^n .

Если $\alpha < n$, где $n = \dim R^n$, то ядро $K(x, s)$ называется *полярным*. Для таких ядер доказывается, что интегральный оператор $A: h[\Omega] \rightarrow h[\Omega]$ является вполне непрерывным. Таким образом, для интегральных операторов с полярными ядрами справедливы теоремы о существовании хотя бы одного собственного значения и теоремы о построении последовательности собственных значений.

Если $\alpha < \frac{n}{2}$ ($n = \dim R^n$), то ядро $K(x, s)$ называется *слабополярным*. Для таких ядер справедлива также и теорема Гильберта-Шмидта.

Все результаты могут быть перенесены на случай комплексных пространств $h[a, b]$ и $h[\Omega]$, но вместо требования симметричности ядра, если ядро является комплексным, надо потребовать $K(x, s) = K^*(s, x)$, для любых x, s из Ω , где $*$ - знак комплексного сопряжения.

§8. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x) \equiv \lambda A y + f.$$

Пусть ядро $K(x, s)$ непрерывное по совокупности переменных, симметрическое и $\neq 0$; $\lambda \neq 0$ - вещественное число (в противном случае решение находится тривиально); $f(x)$ - заданная непрерывная функция; $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ - последовательность характеристических чисел интегрального оператора, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$.

Допустим, что решение уравнения существует. Преобразуем искомую функцию так, чтобы она стала истокорпредставимой. Для этого будем искать решение в виде $y(x) = f(x) + g(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$f(x) + g(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) (f(s) + g(s)) ds + f(x).$$

Сократив $f(x)$, получим уравнение для $g(x)$, операторная форма которого $g = \lambda A(g + f)$.

Решение этого уравнения, если оно есть, является истокопредставимым. Следовательно, по теореме Гильберта-Шмидта, функция $g(x)$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра $K(x, s)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(x).$$

Вычисляя коэффициенты Фурье функций g и $\lambda A(g + f)$, получаем

$$g_k = \lambda(A(g + f), \varphi_k) = \lambda(g + f, A\varphi_k) = \lambda\left(g + f, \frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right) = \frac{\lambda}{\lambda_k}(g_k + f_k) \quad k = 1, 2, \dots,$$

Для определения g_k необходимо решить систему уравнений

$$g_k(\lambda_k - \lambda) = \lambda f_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Возможны два случая.

1) $\lambda \neq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$

Тогда $g_k = \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k$, и можно формально записать ряды Фурье

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k \varphi_k(x) \quad \text{и} \quad y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k \varphi_k(x).$$

Чтобы последний ряд Фурье на самом деле являлся решением, достаточно доказать, что этот ряд сходится равномерно на сегменте $[a, b]$.

Заметим, что $|\lambda_k| \rightarrow \infty$, поэтому, начиная с некоторого номера, выполняется оценка

$$\left| \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right| = \left| \frac{\lambda}{\lambda_k} \right| \cdot \left| \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}} \right| \leq 5 \left| \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|.$$

Тогда для достаточно больших n и любого натурального p имеем

$$\sum_{n+1}^{n+p} \left| f_k \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) \right| \leq 5 |\lambda| \sum_{n+1}^{n+p} \left| \frac{f_k \varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|.$$

Далее, как в предыдущем параграфе, доказывается, что выполняется критерий Коши как достаточное условие равномерной сходимости, т.е. ряд Фурье сходится равномерно.

Замечание. Запишем решение уравнения в следующем виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds}{\lambda_k - \lambda} \cdot \varphi_k(x).$$

Предположим, что можно поменять местами суммирование и интегрирование, тогда

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} \right)}_{R(x, s, \lambda)} f(s) ds,$$

$$\text{или } y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

В операторной форме уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид $y = \lambda A y + f$, или $(I - \lambda A)y = f$. Т.к. решение существует и единственно, то $y = (I - \lambda A)^{-1} f = f + \lambda R_{\lambda} f$, где R_{λ} - интегральный оператор с ядром $R(x, s, \lambda)$. В операторном виде полученный результат можно записать так: $(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda R_{\lambda}$.

Определение. Ядро $R(x, s, \lambda)$ называется резольвентой.

Рассмотрим теперь второй случай.

2) $\lambda = \lambda_n$.

Пусть сначала λ_n – простое характеристическое число. Тогда при $k \neq n$

$$(\lambda_k - \lambda) g_k = \lambda f_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad k \neq n, \quad \text{следовательно} \quad g_k = \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}.$$

При $k = n$ имеем $0 \cdot g_n = \lambda f_n$, где $\lambda \neq 0$. Если $f_n \neq 0$, $f_n = (f, \varphi_n)$, то последнее уравнение не имеет решения, а значит и исходное уравнение решений не имеет. Если же $f_n = 0$, то получаем $g_n = c_n$, где c_n – произвольная постоянная, т.е. решений бесконечно много.

Наконец, пусть λ_n – характеристическое число кратности r . В этом случае получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot g_n = \lambda f_n \\ 0 \cdot g_{n+1} = \lambda f_{n+1} \\ \dots \\ 0 \cdot g_{n+r-1} = \lambda f_{n+r-1} \end{cases}.$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда все коэффициенты Фурье $f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+r-1}$ равны нулю. Если хотя бы один коэффициент Фурье не равен нулю, то система не имеет решений, а, следовательно, и исходное уравнение не имеет решений. Другими словами, условием разрешимости является ортогональность функции $f(x)$ всем собственными функциям, соответствующим характеристическому числу λ_n . В этом случае решение не единственно и дается формулой

$$y(x) = f(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n \\ \dots \\ k \neq n+r-1}}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + c_n \varphi_n(x) + \dots + c_{n+r-1} \varphi_{n+r-1}(x),$$

где c_n, \dots, c_{n+r-1} – произвольные константы. Бесконечный ряд, записанный в данном представлении, сходится абсолютно и равномерно.

В результате проведенного исследования мы доказали две теоремы.

Теорема.

Если однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром имеет только тривиальное решение (т.е. $\lambda \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots$), то неоднородное уравнение имеет, и притом, единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, т.е. $\lambda = \lambda_k$ при некотором k , то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, если неоднородность – непрерывная функция $f(x)$ – ортогональна всем собственным функциям, соответствующим данному λ (т.е. всем решениям однородного уравнения). В последнем случае, если решение существует, то оно не единственно.

Теорема. (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическими ядрами).

Либо неоднородное уравнение имеет решение для любой непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение функции, истокопредставимой с помощью ядра интегрального оператора.
2. Сформулировать теорему Гильберта-Шмидта.
3. Сформулировать определение интегрального оператора с полярным ядром.
4. Сформулировать определение интегрального оператора со слабо полярным ядром.
5. Сформулировать определение резольвенты интегрального оператора.
6. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром.
7. При каком условии неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$ - неоднородности уравнения?
8. Сформулировать условие разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром в случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Сколько решений имеет неоднородное уравнение, если оно разрешимо?

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать теорему Гильберта-Шмидта.
2. Построить решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром с помощью разложения в ряд Фурье по собственным функциям ядра и доказать альтернативу Фредгольма.