

## Глава 2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### Лекция №9

#### §1. Введение.

В этой главе мы будем рассматривать задачи отыскания экстремумов (максимумов или минимумов) функционалов. Сразу отметим, что такие задачи относятся к числу важнейших задач современной математики и исследуются во многих математических курсах таких, как, например, «Экстремальные задачи», «Оптимальное управление», «Линейное программирование», «Выпуклое программирование» и некоторых других. Вариационное исчисление является классическим разделом математики, основы вариационного исчисления заложены еще в 17-18 веках. Функционалы, которые исследуются в вариационном исчислении, будут описаны ниже.

Функционал – это оператор, множество значений которого состоит из чисел. Мы будем рассматривать только вещественные функционалы, множествами значений которых являются вещественные числа. В дальнейшем вместо слов «вещественный функционал» мы будем говорить просто «функционал».

Простейший пример функционала - интеграл  $\int_a^b y(x)dx$ . Каждой функции  $y(x)$ , интегрируемой по Риману на отрезке  $[a, b]$ , сопоставляется число – значение интеграла.

Типичной задачей вариационного исчисления является задача Дидоны: среди всех замкнутых плоских кривых заданной длины найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Хорошо известно, что это окружность.

#### §2. Понятие функционала. Вариация функционала.

Мы будем изучать функционалы, действующие из линейного нормированного пространства  $Y$  в пространство вещественных чисел  $R^1$ . В качестве пространства  $Y$  мы будем рассматривать следующие пространства:

1)  $C[a, b]$  – пространство непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций, в котором определена норма

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|.$$

Напомним, что сходимость по норме этого пространства называется равномерной сходимостью на отрезке  $[a, b]$ .

2)  $C^{(1)}[a, b]$  – пространство функций, непрерывных вместе со своими первыми производными на отрезке  $[a, b]$ . Норма в этом пространстве определяется как

$$\|y\|_{C^{(1)}[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

Можно ввести эквивалентную норму:

$$\|y\|_{C^{(1)}[a,b]} = \max \{ \|y\|_{C[a,b]}, \|y'\|_{C[a,b]} \}$$

(сходимость функциональных последовательностей по обеим введенным нормам одна и та же - равномерная на отрезке  $[a, b]$  сходимость как последовательности функций, так и их первых производных). В дальнейшем мы будем пользоваться только первой нормой.

3)  $C^{(p)}[a, b]$  – пространство функций, непрерывных на  $[a, b]$  вместе со своими  $p$ -ми производными включительно, нормированное с помощью

$$\|y\|_{C^{(p)}[a,b]} = \sum_{k=0}^p \max_{x \in [a,b]} |y^{(k)}(x)|.$$

Сходимость по норме этого пространства – равномерная на отрезке  $[a,b]$  сходимость с производными до  $p$ -го порядка включительно.

Итак, функционал  $V[y]: Y \rightarrow R^1$ , где в качестве  $Y$  мы будем рассматривать только введенные выше функциональные пространства или их подмножества  $Y' \subseteq Y$ , тогда  $V: Y' \rightarrow R^1$ .

Приведем пример функционала:  $V[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$  – длина кривой, описываемой функцией  $y(x)$ ,  $V: C^{(1)}[a,b] \rightarrow R^1$

**Определение.** Функционал  $V[y]$  называется непрерывным в точке  $y_0 \in Y$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall y \in Y: \|y - y_0\| \leq \delta$  выполняется неравенство  $|V[y] - V[y_0]| \leq \varepsilon$ .

Аналогично можно дать определение непрерывности функционала в точке  $y_0 \in Y'$ , если функционал рассматривается только на множестве  $Y'$ . Функционал называется непрерывным на всём пространстве  $Y$  (множестве  $Y'$ ), если он непрерывен в каждой точке  $Y(Y')$ .

**Определение.** Будем называть (замкнутым) шаром с центром в точке  $y_0$  и радиусом  $r > 0$  множество точек:

$$\overline{S}_r(y_0) = \{y \in Y: \|y - y_0\| \leq r\}.$$

**Определение.** Точка  $y_0$  является точкой локального минимума (максимума) функционала  $V[y]$ , если найдется  $r > 0$  такое, что  $V[y] \geq V[y_0]$  ( $V[y] \leq V[y_0]$ ) для любого  $y \in \overline{S}_r(y_0)$  (или  $y \in \overline{S}_r(y_0) \cap Y'$ , если речь идет о локальном минимуме на множестве  $Y'$ ). В дальнейшем мы будем говорить об отыскании только локальных минимумов или максимумов (локальных экстремумов), причем слово «локальный» мы будем опускать.

Пусть  $y_0 \in Y$  – произвольная фиксированная точка,  $h \in Y$  – произвольный элемент  $Y$ . Рассмотрим функцию  $\Phi(t) \equiv V[y_0 + th]$  вещественной переменной  $t$ .

**Определение.** Если для любого  $h \in Y$  существует производная  $\Phi'(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} V[y_0 + th] \Big|_{t=0}$ , то эта производная называется вариацией функционала  $V[y]$  в точке  $y_0$  и обозначается  $\delta V(y_0, h)$ . Очевидно, что  $V[y_0 + th] - V[y_0] = t\delta V(y_0, h) + o(|t|)$ .

Чтобы разъяснить смысл введенного понятия, вспомним математический анализ и рассмотрим случай, когда  $V: R^n \rightarrow R^1$  (функция многих переменных). Тогда  $\Phi'(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} V[y_0 + th] \Big|_{t=0}$  называется производной функции  $V$  по направлению  $h$ .

Теперь определим, что такое дифференцируемый функционал. Функционал  $V[y]$  называется дифференцируемым в точке  $y_0$ , если для любого  $h \in Y$   $V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_0, h) + o(\|h\|)$ , где  $dV(y_0, h)$  – линейный и непрерывный по  $h$  функционал, который иногда называют сильной вариацией в точке  $y_0$  (в отличие от функционала  $\delta V(y_0, h)$  (от аргумента  $h$ ), называемого в этом случае слабой вариацией в точке  $y_0$ ).

Заметим, что точно такое же определение дифференцируемости вводилось и в курсе математического анализа для функций многих переменных  $V: R^n \rightarrow R^1$ . При этом

доказывалось, что, если функция многих переменных дифференцируема в точке  $y_0$ , то в этой точке существуют производные по всем направлениям. Обратное, вообще говоря, неверно. Точно такая же ситуация и в вариационном исчислении - если существует сильная вариация, то существует и вариация (слабая вариация). Обратное неверно.

Далее мы будем использовать только данное выше следующее вариации

$$\delta V(y_0, h) = \frac{d}{dt} V[y_0 + th]_{t=0}.$$

**Теорема (необходимое условие экстремума).** Пусть  $y_0 \in Y$  - точка экстремума функционала  $V[y]$ , и для всякого  $h \in Y$  существует  $\delta V(y_0, h)$ . Тогда  $\delta V(y_0, h) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть для определённости  $y_0$  - точка минимума функционала  $V[y]$  (для максимума доказательство аналогично). Тогда существует шар  $\overline{S}_r(y_0)$ ,  $r > 0$ , такой, что  $V[y] \geq V[y_0]$  для любого  $y \in \overline{S}_r(y_0)$ . Если  $|t| \leq \frac{r}{\|h\|}$ , то  $y_0 + th \in \overline{S}_r(y_0)$  и  $V[y_0 + th] \geq V[y_0]$ .

Рассмотрим функцию  $\Phi(t) = V[y_0 + th]$ . Заметим, что для тех же  $t$  выполнено неравенство  $\Phi(t) \geq \Phi(0)$ . По условию теоремы  $\Phi(t)$  дифференцируема в точке  $t=0$  и, следовательно,  $\Phi'(t)|_{t=0} = 0$ . Таким образом,  $\delta V(y_0, h) = 0$ , что и требовалось доказать.

Теорема справедлива и в случае, когда функционал рассматривается на множестве  $Y' \subseteq Y$ , но для таких  $h \in Y$ , что  $y_0 + th \in Y'$  по крайней мере для достаточно малых  $t$ . В этом случае нужно соответствующим образом изменить и определение вариации.

### §3. Задача с закреплёнными концами. Необходимое условие экстремума.

Будем рассматривать множество функций  $Y' \subseteq Y = C^{(1)}[a, b]$  такое, что:

$$Y' = \{y \in C^{(1)}[a, b], \quad y(a) = A, \quad y(b) = B\},$$

где  $A$  и  $B$  - заданные числа, т.е. множество непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций, у которых известны значения на концах отрезка (концы закреплены).

Рассмотрим функционал

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закреплёнными концами): найти экстремум этого функционала на множестве  $Y'$ .

В вариационном исчислении принята следующая терминология. Будем говорить, что на функции  $y_0(x)$  достигается сильный минимум, если  $V[y] \geq V[y_0]$  для всякого  $y \in Y'$  из окрестности  $y_0$  в метрике пространства  $C[a, b]$ :  $\max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| \leq r$ ,  $r > 0$  (шар с центром в  $y_0$  радиуса  $r$ ).

Определение слабого минимума дается аналогично, но окрестность выбирается в метрике  $C^{(1)}[a, b]$ :

$$\max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x) - y'_0(x)| \leq r, \quad r > 0.$$

В первом случае требуется, чтобы функции  $y(x)$  были равномерно «близки» к функции  $y_0(x)$ , а во втором случае дополнительно требуется равномерная «близость» и

первых производных. Очевидно, что, если функционал имеет сильный минимум в точке  $y_0(x)$ , то он имеет и слабый минимум в той же точке. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определения слабого и сильного максимума даются аналогично.

Необходимое условие экстремума, полученное в предыдущем параграфе,  $\delta V(y_0, h) = 0$ , справедливо как для слабого, так и для сильного экстремума. Получим необходимое условие для задачи с закрепленными концами. Для этого найдем вариацию

$$\delta V(y_0, h) = \left. \frac{d}{dt} V[y + th] \right|_{t=0}.$$

Сначала вычислим производную  $\frac{d}{dt} V[y + th] = \frac{d}{dt} \int_a^b F(x, y + th, y' + th') dx$ , предполагая, что функция  $F$  имеет все необходимые для этого непрерывные частные производные. Относительно  $h(x) \in C^{(1)}[a, b]$  потребуем, чтобы  $y(x) + th(x) \in Y'$ , т.е.  $h(a) = 0$ ,  $h(b) = 0$ . Итак,

$$\frac{d}{dt} V[y + th] = \int_a^b [F_y(x, y + th, y' + th')h + F_{y'}(x, y + th, y' + th')h'] dx.$$

Полагая  $t = 0$  и приравнявая нулю получившуюся вариацию, получаем, что для функции  $y(x)$ , на которой достигается экстремум, имеет место

$$\delta V(y, h) = \int_a^b [F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'] dx = 0.$$

Разобьем интеграл на два и проинтегрируем по частям второй:

$$\int_a^b F_{y'} h' dx = \underbrace{F_{y'} h \Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} h dx.$$

Так как  $h(a) = h(b) = 0$ , то подстановка  $F_{y'} h \Big|_a^b = 0$ . Объединяя оба интеграла в один, получаем

$$\int_a^b (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h dx = 0.$$

Ниже мы докажем, что, если этот интеграл равен нулю для любой функции  $h(x) \in C^{(1)}[a, b]$ , обращающейся в нуль на концах отрезка  $h(a) = h(b) = 0$ , то  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \equiv 0$ , при условии, что в скобках стоит непрерывная функция. Поэтому в качестве необходимого условия экстремума для задачи с закрепленными концами мы получаем следующую краевую задачу для уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{cases}.$$

**Теорема (Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами).**

- 1) Пусть  $y(x)$  осуществляет экстремум (сильный или слабый) в задаче с закреплёнными концами и дважды непрерывно дифференцируема.
- 2) Функция  $F(x, y, y')$  обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно.

Тогда  $y(x)$  является решением краевой задачи для уравнения Эйлера

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{cases},$$

или

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y'} y' - F_{y'y''} y'' = 0; \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Теорема уже доказана.

**Основная лемма вариационного исчисления.** Пусть  $\varphi(x)$  - фиксированная непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция, и для всякой непрерывно дифференцируемой функции  $h(x)$  такой, что  $h(a) = h(b) = 0$ , имеет место  $\int_a^b \varphi(x) h(x) dx = 0$ . Тогда  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Доказательство. Пусть  $\varphi(x) \not\equiv 0$ . Не ограничивая общности, будем считать, что эта функция принимает положительные значения (если  $\varphi(x) \leq 0$  для всех  $x \in [a, b]$ , то заменим  $\varphi(x)$  на  $-\varphi(x)$ ). Тогда в силу непрерывности  $\varphi(x)$  существуют точка  $x_0 \in (a, b)$  такая, что  $\varphi(x_0) > 0$ , и интервал  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq (a, b)$ ,  $\delta > 0$  такой, что  $\varphi(x) \geq \frac{\varphi(x_0)}{2}$  для любого  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Пусть теперь  $h(x)$  - непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\begin{cases} h(x) \equiv 0, & x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta); \\ h(x) > 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Тогда  $\int_a^b \varphi(x) h(x) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(x) h(x) dx \geq \frac{\varphi(x_0)}{2} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} h(x) dx > 0$ , что приводит к противоречию с условием теоремы.

В качестве примера функции  $h(x)$ , удовлетворяющей записанным выше условиям, можно взять

$$h(x) = \begin{cases} (x - (x_0 - \delta))^2 (x - (x_0 + \delta))^2, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta); \\ 0, & x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Приведем некоторые простые примеры.

1. Рассмотрим функционал  $V[y] = \int_0^\pi y^2 dx$  и зададим различные граничные условия.

а) Пусть  $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ . Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид  $y = 0$ , а его решение, удовлетворяющее граничным условиям, есть  $y \equiv 0$ . На этом решении, очевидно, достигается минимум исследуемого функционала.

б) Пусть  $y(0) = 0, y(\pi) = 1$ . Тогда краевая задача для уравнения Эйлера не имеет решений в классе непрерывно дифференцируемых функций.

2. Пусть  $V[y] = \int_0^\pi (y^2 - (y')^2) dx$ , а граничные условия  $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ .

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид  $y'' + y = 0$ , а его общее решение есть  $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ . Краевая задача имеет бесконечно много решений, так как  $C_2 = 0$ , а  $C_1$  - произвольная постоянная.

Рассмотрим некоторые частные случаи зависимости функции  $F(x, y, y')$  от своих аргументов.

1)  $F(x, y, y') = F(x, y)$ . Уравнение Эйлера имеет вид  $F_{y'}(x, y) = 0$  и не является дифференциальным, поэтому его решение (если оно существует), вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям  $y(a) = A_0$ ,  $y(b) = B$ . Следовательно, решение краевой задачи для уравнения Эйлера, вообще говоря, не существует.

2)  $F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$  (линейность по  $y'$ ). Уравнение Эйлера имеет вид

$$M_y + y'N_y - \frac{d}{dx}N(x, y) = M_y + y'N_y - N_x - y'N_y = 0,$$

или

$$M_y - N_x = 0.$$

Полученное уравнение также не является дифференциальным, и краевая задача для уравнения Эйлера, вообще говоря, не имеет решения.

3)  $F = F(y')$ . Уравнение Эйлера имеет вид  $F_{y'y'}y'' = 0$ , и существуют две возможности.

а)  $y'' = 0$ ; его общее решение  $y = C_1x + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

б)  $F_{y'y'}(y') = 0$ . Если  $k_i$  – корни последнего уравнения, то  $y' = k_i$ , а соответствующие решения уравнения Эйлера – также линейные функции  $y = k_ix + \tilde{C}_i$ .

Итак, экстремалими в этой задаче являются прямые.

В частном случае, когда  $l[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ ;  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$  (длина кривой, соединяющей две точки на плоскости), доказанное выше отражает известный факт, что среди всех кривых, соединяющих две точки плоскости  $(a, A)$  и  $(b, B)$ , минимальную длину имеет отрезок прямой.

4)  $F = F(x, y')$ . Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$$

или

$$F_{y'}(x, y') = C.$$

5)  $F = F(y, y')$ . Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0.$$

Это уравнение, очевидно, имеет первый интеграл

$$F - y'F_{y'} = C.$$

В качестве конкретного примера такого типа рассмотрим классическую задачу о брахистохроне – кривой, по которой материальная точка в поле тяжести скатывается за наименьшее время из точки  $(0, 0)$  в точку  $(x_1, y_1)$ . Эта задача была решена Иоганном Бернулли еще в 1696 году.

Пусть на плоскости  $(x, y)$  ось  $y$  направлена вниз, и в том же направлении действует и сила тяжести. Заметим, что при движении в поле силы тяжести

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{2gy},$$

где  $S$  – путь,  $g$  – ускорение свободного падения.

С другой стороны,

$$dS = \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

где  $y = y(x)$  - траектория движения материальной точки. Время движения по этой траектории определяется функционалом

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Определим траекторию, для которой функционал  $T[y]$  принимает минимальное значение, т.е. ту, где перемещение из точки  $(0,0)$  в точку  $(x_1, y_1)$  происходит за наименьшее время. Заметив, что подынтегральная функция не зависит явно от  $x$ , запишем сразу первый интеграл уравнения Эйлера (см. выше)

$$F - y' F_{y'} = C,$$

или

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C \quad \Leftrightarrow \quad y(1+(y')^2) = C_1.$$

Вводя параметр  $t$  по формуле  $y' = \operatorname{ctg} t$ , найдем

$$y(t) = \frac{C_1}{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2} (1 - \cos 2t).$$

Теперь определим  $x(t)$ . Имеем

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1 (1 - \cos 2t) dt,$$

откуда 
$$x - C_2 = \frac{C_1}{2} (2t - \sin 2t).$$

Из полученных выражений для  $x(t)$ ,  $y(t)$  и условия  $y(0) = 0$ , находим  $C_2 = 0$ .

После замены  $2t = t_1 \geq 0$  и  $\frac{C_1}{2} = \tilde{C}_1$  получаем уравнение брахистохроны

$$x = \tilde{C}_1 (t_1 - \sin t_1), \quad y = \tilde{C}_1 (1 - \cos t_1).$$

Итак, брахистохрона – это циклоида, а  $\tilde{C}_1$  находится из условия  $y(x_1) = y_1$ .

Рассмотрим теперь задачу с закрепленными концами для функционала

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx.$$

Граничные условия имеют вид:

$$y(a) = y_0^{(1)}, \quad y(b) = y_0^{(2)};$$

$$y'(a) = y_1^{(1)}, \quad y'(b) = y_1^{(2)};$$

.....

$$y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}^{(1)}, \quad y^{(n-1)}(b) = y_{n-1}^{(2)}.$$

Запишите самостоятельно уравнение Эйлера для этой задачи.

Пусть теперь функционал имеет вид

$$I[y] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n) dx,$$

$y = (y_1, \dots, y_n)$  - вектор-функция. Рассмотрим задачу с закрепленными концами:

$$y_i(a) = A_i,$$

$$y_i(b) = B_i,$$

где  $i = 1, \dots, n$ ;  $A_i, B_i$  - заданные числа.

**Теорема.** Пусть:

- 1) Функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  осуществляют экстремум функционала  $V[y]$  в задаче с закрепленными концами и дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$ .
- 2)  $F(x, y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n)$  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Тогда  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\begin{cases} F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0 \\ y_i(a) = A_i; \quad y_i(b) = B_i; \end{cases}, \quad \text{где } i = 1, \dots, n.$$

Для доказательства сформулированного выше необходимого условия экстремума достаточно заметить, что если вектор-функция  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  осуществляет экстремум функционала  $V[y]$  в задаче с закрепленными концами в случае, когда можно изменять все компоненты вектор-функции, то эта же вектор-функция осуществляет экстремум  $V[y]$  в случае, когда меняется одна компонента, а остальные фиксированы. Отсюда немедленно следует, что  $y(x)$  удовлетворяет записанной выше системе уравнений Эйлера.

Пример. Рассмотрим задачу из механики. Пусть  $n$  материальных точек, имеющих массы  $m_i$  и координаты  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , движутся под действием сил

$$F_i = \left( -\frac{\partial u}{\partial x_i}, -\frac{\partial u}{\partial y_i}, -\frac{\partial u}{\partial z_i} \right),$$

порожденных потенциальной функцией  $u = u(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ . Считая, что координаты точек зависят от времени  $t$ , заметим, что кинетическая энергия системы материальных точек имеет вид

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} ((x'_i)^2 + (y'_i)^2 + (z'_i)^2).$$

Введем функционал действия

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

где  $L$  – функция Лагранжа  $L = T - u$ ,

или

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} ((x'_i)^2 + (y'_i)^2 + (z'_i)^2) - u(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n).$$

По принципу наименьшего действия (принцип Гамильтона) материальные точки движутся по траекториям, для которых значение функционала  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  минимально.

Система уравнений Эйлера для функционала  $\int_{t_1}^{t_2} L dt$  имеет вид:



$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'_i} = 0, \text{ где } i = 1, \dots, n. \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial z'_i} = 0 \end{cases}$$

Вычисляя производные, получаем систему уравнений движения (к которым нужно добавить начальные условия):

$$\begin{cases} m_i x''_i = -\frac{\partial u}{\partial x_i}; \\ m_i y''_i = -\frac{\partial u}{\partial y_i}; \text{ где } i = 1, \dots, n. \\ m_i z''_i = -\frac{\partial u}{\partial z_i}; \end{cases}$$

Читателю предлагается самостоятельно получить первый интеграл этой системы - закон сохранения энергии:

$$T + u = \text{const.}$$

## Экзаменационные вопросы

### 1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение функционала.
2. Сформулировать определение непрерывного функционала.
3. Сформулировать определение дифференцируемого функционала.
4. Сформулировать определение вариации функционала.
5. Сформулировать постановку простейшей задачи вариационного исчисления – задачи с закрепленными концами.
6. Сформулировать определение сильного минимума функционала.
7. Сформулировать определение сильного максимума функционала.
8. Сформулировать определение слабого минимума функционала.
9. Сформулировать определение слабого максимума функционала.
10. Сформулировать определение строгого минимума (максимума) функционала.
11. Сформулировать необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами.
12. Сформулировать основную лемму вариационного исчисления.
13. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и необходимые условия

экстремума для функционала 
$$V[y] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n) dx.$$

### 2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его вариации при условии, что вариация существует.
2. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и получить необходимое условие экстремума.
3. Доказать основную лемму вариационного исчисления.
4. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и получить необходимые условия экстремума для функционала 
$$V[y] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n) dx.$$
5. Привести пример первой краевой задачи для уравнения Эйлера для функционала 
$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$
 которая не имеет решения.
6. Привести пример первой краевой задачи для уравнения Эйлера для функционала 
$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$
 которая имеет неединственное решение.
7. Записать решения уравнения Эйлера для функционала 
$$V[y] = \int_a^b F(y') dx.$$
8. Записать первый интеграл уравнения Эйлера для функционала 
$$V[y] = \int_a^b F(x, y') dx.$$
9. Записать первый интеграл уравнения Эйлера для функционала 
$$V[y] = \int_a^b F(y, y') dx.$$
10. Сформулировать и решить задачу о брахистохроне.
11. Исходя из вариационного принципа наименьшего действия, получить уравнения движения материальной точки в потенциальном поле.