1. Записать уравнение **Фредгольма 2-го рода**. Какое уравнение называется однородным

$\boxed{y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x)}$, $x,s\in[a,b]$ где $K(x,s)$ - заданная непрерывная по совокупности аргументов функция, называемя **ядром** интегрального уравнения (уравнение назвается интегральным, если неизвестная функция стоит под знаком интегрлаа), $f(x)$ - заданная непрерывная функция, называемая **неоднородностью** уравнения, если $\boxed{f(x)\equiv 0}$, то уравнение называется **однородным**. λ - **вещественный параметр** $y(x)$ - неизвестная непрерывная функция

2. Записать уравнение **Вольтера 2-го рода**. Какое уравнение назвается однородным.

$\boxed{y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x)}$, $x,s\in[a,b]$ обозначениея такие же как и выше.
$K(x,s)$ - непрерывно по совокупности аргументов в треугольной области $\Delta=(x,s:a\leq s\leq x\leq b)$

3. Записать уравнение **Фредгольма 1-го рода**. Какое уравнение называется однородным

$\boxed{\int_a^b K(x,s)y(s)ds=f(x)}$, $x,s\in[a,b]$ Обозначения такие же.

4. Записать уравнение **Вольтера 1-го рода**. Какое уравнение назвается однородным.

$\boxed{\int_a^x K(x,s)y(s)ds=f(x)}$, $x,s\in[a,b]$

5. Что такое линейное пространство

Множество L называется **линейным пространством**, если $\boxed{\forall x,y\in L\ \ \exists(x+y)\in L}$ и $\boxed{\forall x\in L,\ \alpha\in\mathbb{R}\ \ \exists\alpha x\in L}$, и выполняются следующие условия:

1. $\forall x,y\in L\ \ x+y=y+x$ (комутативность)
2. $\forall x,y,z\in L\ \ (x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность)
3. $\forall\exists 0\in L\ \ x+0=x$ (существование нулевого элемента)
4. $\forall x\in L\ \ \exists(-x)\ \ x-x=0$ (существование обратного)
5. $\forall x,y\in L\ \ \alpha\in\mathbb{R}\ \ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (дистрибутивность)
6. $\forall x\in L\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (дистрибутивность)
7. $\forall x\in L\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \ (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число)
8. $\exists 1\in L\ \ x\in L\ 1x=x$ (существование еденичного)

Элементы линейного пространства называют векторами, поэтому иногда линейное пространство называется **векторным**.

6. Что такое метрическое пространство

Множетсво М назвается **метрическим** пространством если $\boxed{\forall x, y \in M \quad \exists \rho(x, y) \in \mathbb{R}}$ называемое **метрикой** или расстоянием причем выполнены следующие условия:

1. $\forall x, y \in M \quad \rho \geq 0, \quad \rho = 0 \Rightarrow x \equiv y$
2. $\forall x, y \in M \; \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
3. $\forall x, y, z \in M \; \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника)

7. Что такое нормированное пространство

Линейное пространство N называется **нормированным** если $\boxed{x \in N \quad \exists \|x\| \in \mathbb{R}}$ называемое нормой, причем выполнены следующие условия :

1. $\forall x \in N \quad \|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$
2. $\forall x \in N, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (неотрицательная однородность нормы)
3. $\forall x, y \in N \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Нормированное пространство является метрическим, так как можно ввести меру таким образом $\rho(x, y) = \|x - y\|$

8. Что такое евклидово пространство.

Линейное пространство E называется **евклидовым** если $\boxed{x, y \in E \quad (x, y) \in \mathbb{R}}$ называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия.

1. $\forall x, y \in E \quad (x, y) = (y, x)$ (симметричность)
2. $\forall x_{1,} x_{2,} y \in E \, (x_1 + x_{2,} y) = (x_{1,} y) + (x_{2,} y)$ (аддетивность)
3. $\forall x, y \in E, \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ (однородность)
4. $\forall x \in E \quad (x, x) \geq 0 \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$ (свойство скалярного квадрата)

9. Дать определение **сходимости** последовательности элементов **метрического** пространства.

Последовательность элементов $x_n \in M, \quad n = 1,2, \ldots$ сходится к элементу $x_0 \in M$ $x_n \to x_{0,} \quad n \to \infty$, если $\boxed{n \to \infty \Rightarrow \rho(x_n, x_0) \to 0}$

10. Дать определение **сходимост**и последовательности элементов **нормированного** пространства.

Последовательность элементов $x_n \in N, \quad n = 1,2, \ldots$ сходится к элементу $x_0 \in N$ (по норме пространства N) $x_n \to x_{0,} \quad n \to \infty$, если $\boxed{n \to \infty \Rightarrow \|x_n - x_0\| \to 0}$

11. Дать определение **фундаментальной сходимости** элементов нормированного пространства.

Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности в пространстве $C[a, b]$ – фундаментальнсть.

Последовательность $x_n, \quad n = 1,2, \ldots$ элементов метрического пространства называется **фундаментальной**, если $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad n \geq k, \, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon}$

Если последовательность сходится, то она фундаментальна

12. Что такое банахово пространство

Полное нормированное пространство называется **банаховым**.
Если любая фундаментальная последовательность сходится, то нормированное пространсто называется **полным**.

13. Что такое пространство $\boxed{C[a,b]}$. Как называется сходимость по норме этого пространства.

$C[a,b]$ - пространство **непрерывных функциий** на отрезке $[a,b]$. Норма этого пространства определяется как $\boxed{\|y\|_{C[a,b]}=max\{|y(s)|\},\quad s\in[a,b]}$. Сходимость по норме пространства $C[a,b]$ называется **равномерной сходимостью.**
Это пространство – линейное пространство

14. Что такое пространство $\boxed{C^{(p)}[a,b]}$. Как называется сходимость по норме этого пространства.

Пространство **функциий, непрерывных с производными** до p -го порядка включительно. В этом пространстве можно ввести много различных норм, но мы введем ее следующим образом $\boxed{\|y\|_{C^{(p)}[a,b]}=\sum_{k=0}^{p} max\{|y^{(k)}(s)|\},\quad s\in[a,b]}$. Пространство $C^{(p)}[a,b]$ является банаховым.
Сходимость по норме этого пространства называется **равномерной сходимостью** на отрезке $[a,b]$ со производными до p -го порядка включительно.
Это пространство – линейное пространство.

15. Как определяется **скалярное произведение в пространстве** $h[a,b]$? Почему это пространство является бесконечномерным евклидовым пространством? Как называется ходимость по норме этого пространства.

Рассмотрим линейное пространство функций, непрерывных на $[a,b]$, введем норму с помощью скалярного произведения $\boxed{(y_{1,}y_2)=\int_a^b y_1(x)y_2(x)dx}$, скалярное произведение порождает норму: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ или $\boxed{\|y\|_{h[a,b]}=\sqrt{\int_a^b y^2(x)dx}}$. Такое пространство мы будем обозначать $\boxed{h[a,b]}$

Сходимость по норме $h[a,b]$ называется **сходимостью в среднем**.
Это пространство **бесконечомерное**. Пример: пространство полиномов $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$

16. Что такое неравенство **Коши-Буняковского**.

Для действительных чисел $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{x\cdot y}$

Для Евклидова пространства $(x,y)^2\leq(x,x)(y,y)$
Если $\|x\|_E=\sqrt{(x,x)}$ $\boxed{|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|}$, причем равенство выполняется только тогда, когда x,y линейно зависимы.

17. Что такое линейный оператор.

Линейным оператором А, действующим из линейного пространства L_1 в L_2, называется такое отображение, при котором.

1. $\boxed{\forall x, y \in L_1 \ \ A(x+y) = A(x) + A(y)}$
2. $\boxed{\forall x \in L_1, \lambda \in \mathbb{R} \ A(\lambda x) = \lambda A(x)}$

Будем обозначать область определения оператора как $D(A)$ и для простоты $D(A) = L_1$. Множество значений $R(A)$. В днанном случае $R(A) \subseteq L_2$

18. Дать два определения **непрерывности в точке линейного оператора**, действующего в нормированных пространствах

Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любого $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ y \in D(A) \ \ \|y - y_0\| < \delta \Rightarrow \|Ay - Ay_0\| < \varepsilon}$

Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n, \ n = 1, 2, 3, \ldots$ $\boxed{y_n \in D(A), y \to y_0 \Rightarrow \{Ay_n\}_n \to Ay_0}$

19. Дать определение **нормы линейного оператора**, действующего в нормированных пространствах

Нормой оператора A называется $\boxed{\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1} = 1} \|Ay\|_{N_2}}$. Если не будет вызывать противоречий, то $\|A\|_{N_1 \to N_2} = \|A\|$

20. Что такое **ограниченный линейный оператор**

Если $\boxed{\|A\| < \infty}$, то оператор называется ограниченным. В конечномерных пространсвах любой линейны оператор ограниченный.

21. Что такое **ограниченная последовательность** элементов нормированного пространства.

Последовательность элементов $y_n, \ n = 1, 2, \ldots$ нормированного пространства называется ограниченной если существует $C \in \mathbb{R}$, что $\boxed{\|y_n\| \leq C}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

22. Что такое **компактная последовательность** элементов нормированного пространства

Последовательность элементов $\boxed{y_n, \ \ n = 1, 2, \ldots}$ нормированного постранства, называется компактной, если из любой ее подпоследовательности можно выделить сходяющуюся последовательность

23. Что такое вполне **непрерывный оператор**

Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности $y_n, \ n = 1, 2, \ldots$ из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов из N_2, такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (компактная)

24. Сформулировать необходимое и достаточное условие **компактности последовательности** векторов конечномерного евклидового пространства R^n

Лемма Больцано-Вейерштраса: Из любой огранниченной последовательности можно выделить сходяющуюся подпоследовтаельность. Она применима для вещественных числе. Для n-мерного пространства аналогичное утверждение имеет место

25. Сформулировать теорему **Арцела**

Если последовательность элементов из $C[a,b]$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность

26. Дать определение оператора, **сопряженного** к линейному оператору в евклидовом пространстве

Пусть оператор А действует $E \to E$ (E бесконечномерное евклидово просрнаство.) Оператор $A^* : E \to E$ называется сопряженный с A если $\boxed{\forall y_{1,} y_2 \in E (Ay_{1,} y_2) = (y_{1,} A^* y_2)}$

27. Дать определение оператора, **самосопряженного** к линейному оператору в евклидовом пространстве

Если $\boxed{A = A^*}$, то оператор называется самосопряженным.

28. Что такое интегральный оператор Фредгольма с симметричным ядром.

Интегральный оператор Фредгольма $\boxed{Ay = \int_a^b K(x,s) y(s) ds, \quad x,s \in [a,b]}$.

Ядро оператора $K(x,s)$ - непрерывно по совокупности аргументов, откуда из теорем Математического аналица следует, что оператор является линейным.

Оператор $\boxed{A^* = \int_a^b K^*(x,s) y(s) ds}$ **сопряженный к оператору Фредгольма**, причем $\boxed{K^*(x,s) = K(s,x), \quad \forall x,s \in [a,b]}$. Если $\boxed{\forall x,s \in [a,b] \quad K(x,s) = K(s,x)}$, то ядро называется **симметричным**.

29. Что такое собственное значение линейного оператора.

Число Λ называется **собственным значением** линейного оператора A , если $\boxed{\exists y \neq 0 \quad Ay = \Lambda y}$. Этот элемент y называется собственным вектором.

30. Что такое собственный вектор линейного оператора.

Число Λ называется собственным значением линейного оператора A , если $\boxed{\exists y \neq 0 \quad Ay = \Lambda y}$. Этот элемент y называется **собственным вектором**.

31. Что такое максимальный вектор линейного оператора.

Элемент e **называется максимальным элементом** (вектором), оператора а, если $\boxed{\|e\| = 1, \quad \|Ae\| = \|A\|}$

32. Что такое инвариантное подпространство линейного оператора.

Пространство H называется **инвариантным пространством** линейного оператора, если $\boxed{AH \subseteq H}$

33. Что такое кратность собственного значения линейного оператора.

Число линейно независимых собственных векторов, соотвествующих собственному значению, называется **кратностью собственного значения**.

34. Что такое **собственная функция ядра** интегрального оператора Фредгольма.

Собственная функция ядра есть собственые вектора оператора при условиии что ядро является симметричным нетривиальным непрерывным.

Все полученные результаты верны для интегрального оператора с непрерывным, симметрическим и неравным тождественно нулю ядром. В этом случае вместо слов собственные векторы говорят собственные функции интегрального оператора или собственные функции ядра К(x,s)

35. Что такое **вырожденный линейный оператор**.

Нуль-пространство линейного оператора А называется множенство $\boxed{KerA=\{x\in D(A)=L,\ \ Ax=0\}}$. Очевидно, что $KerA$ - линейное подпространство L , причем $0\in KerA$.

Если $\boxed{KerA\neq\{0\}}$ (в этом случае говорят, что нуль-пространство не тривиально), то оператор называется **вырожденным**.

Обрантный оператор существует тогда и только тогда, когда оператор А не является вырожденным

36. Что такое **замкнутое ядро** интегрального оператора Фредгольма.

Ядро $\boxed{K(x,s)}$ интегрального оператора является замкнутым, если он является невырожденным.

37. Что такое **вырожденное ядро** интегрального оператора Фредгольма.

Ядро $K(x,s)$ называется вырожденным, если оно представимо в виде $\boxed{K(x,s)=\sum_{j=0}^{n} a_j(x)b_j(s)}$ на $[a,b]$, где $a_j(x), b_j(s)$ - непрерывны по своим аргументам на интервале $[a,b]$

38. Как вводится **скалярное произведение в комплексном расширении** пространства $h[a,b]$.

$\boxed{(y_{1,}y_2)=\int_a^b y_1^*(x)y_2(x)dx}$. Его свойства отличаются от скалярного произведения в вещественом случае, например $(y_{1,}y_2)=(y_{2,}y_1)^*$

39. Дать определение функции, истокопредставимой с помощью ядра интегрального оператора.

Функция называется **истокопредставимой** с помощью ядра $K(x,s)$ если существует непрерывная функция $g(x)$, такая что $\boxed{f(x)=\int_a^b K(x,s)g(s)ds}$, или, что тоже самое, $f=Ag$ (т.е. $f\in R(A)$, где оператор A действует $h[a,b]\rightarrow h[a,b]$)

40. Сформулироват теорему **Гильберта-Шмидта**.

Если функция $f(x)$ истокопредставима с помощью ядра $K(x,s)$, то она может быть разложена в ряд $\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\varphi_k(x)}$, $\boxed{f_k(x)=(f,\varphi_k)=\int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds}$, причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$

41. Что такое **интегральный оператор с полярным ядром** .

Пусть Ω замкнутая ограниченная область $\Omega\subseteq R^n$.
Введем пространство $h[\Omega]$, состоящее из непрерывных функций на Ω со скалярным произведением $(y_1,y_2)=\int_\Omega y_1(x)y_2(x)dx,\ \ dx=dx_1dx_2dx_3\dots dx_n$

В курсе ММФ рассматриваются ядра $\boxed{K(x,s)=\frac{\Phi(x,s)}{|x-s|^\alpha}}$, где $\Phi(x,s)$ - непрерывная по совокупности аргументов симметричная функция, $|x-s|=r_{xs}$ - расстояние в между точками в пространстве R^n

Если $\boxed{\alpha<n}$, то ядра $K(x,s)$ называются **полряными** ($n=dim\,R^n$). Для таких ядер доказывается, что интегральный оператор непрерывен, справедливы теоремы о существовании хотя бы одного собственного значения и теоремы о последовательности собственных значений.

42. Что такое **интегральный оператор со слябополярным ядром**.

Если $\boxed{\alpha<\frac{n}{2}}$, то ядра $K(x,s)$ называются слабополярными. Для них еще справедлива теорема Гильберта-Шмидта.

43. Что такое **резольвента** интегрального оператора.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x)=\lambda Ay+f,\ \ \lambda\neq 0$. Допустим что $\exists\, y(x)=f(x)+g(x)$ и при этому $f(x)+g(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\left(f(x)+g(x)\right)ds+f(x)$ или $g=\lambda A(g+f)$. Решение этого уравнения если оно есть является истоко представимым и по теориеме Г-Ш $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k(x)$. $\lambda_k,\ k=1,2,3,\ldots$ - последовательность характеристических чисел интегрального оператора, а $\varphi_k,\ k=1,2,3,\ldots$ - ортонормированная система собственных функций.

Решение можно записать в виде $y(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds\cdot\varphi_k(x)}{\lambda_k-\lambda}$.

Предположим что можно поменять местами суммирование и интегрирование, то получим

$$\boxed{y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\cdot\varphi_k(x)}{\lambda_k-\lambda}\right)f(s)ds=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)ds}$$

Ядро $R(x,s,\lambda)$ называется резольвентой.

44. Сформулировать **альтернативу Фредгольма**

Для интегральных уравнений второго рода с симметричными ядрами. Либо неоднородное уравнение имеет решение для любой непрерывной функции $f(x)$ либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение

45. При каком **условии** неоднородное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным непрерывным ядром **имеет** притом **единственное нетривиальное решение**, для любой непрерывной функции

Если **однородное уравнение** Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметричным ядром **имеет только тривиальное** решение (т.е. $\lambda\neq\lambda_k,\ k=1,2,3,\ldots$) , то неоднородное уравнение имеет единственное решение для любой функции $f(x)$

46. Сформулировать **условие разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма** второго рода с симметричным непрерывным ядром, в случае когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Сколько решений имеет неоднородное уравнение, если оно разрешимо

Если **однородное имеет нетривиальное решение**, то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда неоднородность $f(x)$ **непрерывная функция ортогональна всем собственным функциям** соотвествующего диапозона λ . Если решение есть, то существует и бесконечно много решений.

47. Что такое сжимающий оператор

Оператор $D:B\rightarrow B$ (банахово пространство) называется **сжимающим** (или сжимающим отображением) если $\boxed{\exists q:\ 0\leq q<1\ \ \forall\, y_{1,}y_2\in B\ \ \|Dy_1-Dy_2\|<g\|y_1-y_2\|}$.

48. Что такое неподвижная точка оператор.

Элемент y назаывается **неподвижной точкой** оператора D если $\boxed{Dy=y}$

49. Сформулировать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора. Как ее можно найти.

Пусть D - **сжимающий** оператор, тогда **существует единственная сжимающая** точка $y\in B$ $Dy=y$, которая может быть найдена методом **последовательных приближений** (простой итерации) $\boxed{y_{n+1}=Dy_n, \quad n=1,2,3,\ldots \quad y_0\in B}$ - произвольная точка из B (первое приближение) , причем $n\to\infty$ $y_n\to y: Dy=y$

50. Записать **метод последователных приближений** решения интегрального уравнения **Фредгольма** второго рода с малыми λ

Будем рассматривать оператор $D: Dy=\lambda Ay+f$ $D:\ C[a,b]\to C[a,b]$ - бахоново, т.е. Полное нормированное пространство. Очевидно что он является непрерывным, а решение интегрального уравнения его неподвижной точкой.
Обозначим $max_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|=M$. Оператор будет являться жимающим, если выполняются условия вопроса 47.
$\|z_1-z_2\|_{C[a,b]}=\|Dy_1-Dy_2\|_{C[a,b]}\le|\lambda|M(b-a)\|y_1-y_2\|_{C[a,b]}$. Обозначим $q=|\lambda|M(b-a)$.
Потребуем условия $q<1$, в этом случае оператор будет сжимающим, а следовательно имеет место теорема о неподвижной точке.

λ Мы назовем **малым,** если $\boxed{|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}}$

Рассмотрим метод последовательных приближений в этом случае. $y_{n+1}=\alpha A y_n+f$, $n=1,2,3,\ldots$ $y_0\equiv 0$.

1. $y_1=\lambda\int_a^b K(x,s)\cdot 0\cdot ds+f(x)=f(x)$
2. $y_2=\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds+f(x)$
3. $$y_3=\lambda^2\int_a^b K(x,\zeta)\left(\int_a^b K(\zeta,s)f(s)ds\right)d\zeta+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds+f(x)$$
$$\underbrace{\lambda^2\int_a^b\left(\int_a^b K(x,\zeta)K(\zeta,x)d\zeta\right)}_{K_2(x,s)}f(s)ds+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds f(x)$$,

где $K_2(x,s)$ - повторное интегрированное ядро.
В результате получаем $\boxed{y_{n+1}=f+\lambda Af+\lambda^2A^2f+\ldots+\lambda^nA^nf}$, где A^n интегральный оператор с повторным ядром $\boxed{K_n=\int_a^b K(x,\zeta)K_{n-1}(\zeta,x)d\zeta}$

51. Что такое **повторное, интегрированное ядро** интегрального оператора Фредгольма. *Ядром какого интегрального оператора оно является.*

Повторное ядро $\boxed{K_n = \int_a^b K(x,\zeta) K_{n-1}(\zeta, x) d\zeta}$

52. Сформулировать **теорему** о **разрешимости интегрального уравнения Вольтера 2-го рода.**

Уравнение имеет вид $y=\lambda A y+f$ где оператор $Ay=\int_a^x K(x,s) f(s) ds$

Поступим как и раньше. Ведем оператор $D: C[a,b] \to C[a,b]$ следующим образом $\forall y \in C[a,b]\ Dy=\lambda A y+f$. Некоторая степень D^k - сжимающий оператор (k зависит только от λ но не от $f(x)$)

Теорема. Для любого λ найдется k, такое, что D^k - сжимающий оператор.

Решение уравнения Вольтера 2-го рода можно найти методом последовательных приближений. В данном случае методом Пикара. Для любого начального приближения y_0

$y_{n+1}=\lambda \int_a^x K(x,s) y_n(s) ds+f(x), \quad n=1,2,3,\ldots \Leftrightarrow y_{n+1}=\lambda A y_n+f$. Если $y_0 \equiv 0$, то

$y=f+\lambda A f+\lambda^2 A^2 f+\ldots+\lambda^n A^n f+\ldots$

53. Записасть **уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром**.

$y=\lambda A y+f$, $K(x,s)=\sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$, где $a_j(x), b_j(s)$ - непрерывные по своим аргументам линйно независимые функции. $f(x)$ - заданная функция, $\lambda \neq 0$. Получаем

$\boxed{y(x)=\sum_{j=1}^n a_j(x) \int_a^b b_j(s) y(s) ds+f(x)}$

54. Что такое **союзное** интегральное уравнение.

Союзное интегральное (сопряженное уравнение) - это уравнение с ядром $\boxed{K^*(x,s)=K(s,x)}$.

55. Сформулировать **условие разрешимости неоднородной системы** линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему уравнений $BX=F$, найдем все нетривиальные линейно независимые решения уравения $B^* \psi=0$. Если F ортогональна всем этим решениям, то неоднородная система имеет решения.

Ортогональность решения неоднородной союзной системы и неоднородности исходной системы.

56. Сформулировать **теорему** о **числе независимых решений однородного уравнения Фредгольма 2-го рода и союзного с ним** (1-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра эта теорема была доказана в лекционном курсе.

Однородное $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0$ и союзное с ним

$\psi(x)-\lambda\int_a^b K^*(x,s)\psi(s)ds=0$, (если чё $K^*(x,s)=K(s,x)$) при любом фиксированном λ имеют **либо тривиальные** решения, **либо одинаковое** конечное **число** линейно независимых решений

Теорема была доказана для симметричных и вырожденных ядер. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденными ядрами к интегральному уравнению с вырожденными ядрами.

57. Сформулировать **теорему о необходимом и достаточном условии разрешимости неоднородного** уравнения Фредгольма 2-го рода и союзного с ним (2-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра эта теорема была доказана в лекционном курсе.

Чтобы неоднородное урвнение $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была **ортогональна** всем линейно независимсмым **решениям** однородного союзного уравнения $\psi(x)-\lambda\int_a^b K^*(x,s)\psi(s)ds=0$.

Теорема была доказана для случая **симметричных и вырожденных ядер**. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром, к интегральному уравнению с вырожденным ядром.

58. Сформулировать **альтернативу Фредгольма** (3-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра эта теорема была доказана в лекционном курсе.

Интегральное уравнение $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x)$ либо разрешимо для любой неоднородности $f(x)$ либо однородное уравнение $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0$ имеет нетривиальное решение.

Теорема была доказана для случая симметричных и вырожденных ядер. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром, к интегральному уравнению с вырожденным ядром.

59. Сформулировать **теорему о характеристических числах интегрального оператора Фредгольма** (4-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра эта теорема была доказана в лекционном курсе.

Множество характеристических чисел однородного уравнения $\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0$ **не более чем счетно**, с единственной возможной предельной точкой ∞

60. Что такое **оператор Штурма-Ляувиля**

Не оченидно из лекций, что оператор Ш-Л записывается в виде $\boxed{Ly=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y}$, где $p(x)$ - непрерывно дифференцируема, а $q(x)\geq 0$ - непрерывная на $[a,b]$ функция.

61. Сформулировать **задачу Штурма-Ляувиля** в случае однородных граничных условий первого рода

Краевая задача на собственные значения и собственные функции $\begin{cases} Ly+\lambda\rho(x)y=0 \\ y(a)=y(b)=0 \end{cases}$

Где оператор L имеет вид $Ly=\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y$, при чем $p(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, $q(x)\geq 0, \rho(x)$ - непрерывные на $[a,b]$ - функции

62. Описать **свойства собственных значений** и собственных функциий задачи Штурма-Ляувиля.

1. Существует бесконечо много собственных значений λ_n
2. Каждое собственное значение имеет кратность единица.
3. Собственные функции ортогональны с весом $\rho(x)$
4. Собственные значения зачади положительны

63. Сформулировать **теорему Стеклова**.

Любая дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$ и обращающаяся в ноль на концах отрезка функция $f(x)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций задачи Штурма-Ляувиля $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)y_n(x)$, где коэффициенты фурье равны $f_n(x)=\int_a^b f(x)\rho(x)y_n(x)dx$

64. Что такое **функционал**.

Функционал это **оператор**, множество **значений** которого состоит из **чисел**. В курсе рассматриваются только **вещественные функционалы**. Простейший пример $\int_a^b y(x)dx$. Каждой функции $y(x)$ ставится в соотвествие число – значение интеграла.

65. Что такое **непрерывный функционал**.

Будем рассматривать функционалы, действующие из линейного ортонормированнного пространства Y в пространство вещественных чисел R^1
$V[y]: Y\to R^1$

Функционал называется непрерывным, если
$\boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \|y-y_0\|<\delta\Rightarrow|V[y]-V[y_0]|<\varepsilon}$

66. Что такое **дифференцируемый** функционал.

Пусть $y_0 \in Y,\ h \in Y,\ t \in \mathbb{R}$, рассмотрим функцию $\Phi(t) = V[y_0 + th]$.
Если существует $\boxed{\Phi'(t)_{t=0} = \frac{d}{dt} V[y_0 + th]_{t=0}}$, то эта производная называется вариацией функционала в точке и обозначается как $\delta V(y_{0,} h)$.

Функционал называется дифференцируемым в точке y_0, если $\boxed{\forall h \in Y\ \ V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_{0,} h) + o(\|h\|)}$, где dV - линейный и непрерывный по h функционал, который иногда называют **сильной вариацией** в точке y_0, δV - слабой вариацией

67. Что такое **вариация функционала**.

См. Предыдущий вопрос.

68. Поставить простейшую задачу вариационного исчесления – з**адачу с закрепленными концами**.

Будем рассматривать множество функций таких, что $Y' \subseteq Y = C^{(1)}[a, b]$, такое, что $Y' = \{y \in C^{(1)}[a, b],\ y(a) = y_{0,}\ y(b) = y_1\}$, числа $y_{0,}\ y_1$ заданы. По-русски: множество функций непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, у которых извесны значения на концах отрезка.

Будем рассматривать функционал $V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx$

Простейшая задача вариационного исчисления – **нахождение экстремума этого функционала** на множестве Y'.

69. Что такое **сильный минимум** Функционала. Какой минимум называется строгим

Будем говорить, что на функции $y_0(x)$ достигается сильный минимум $\forall y \in Y'$ из окрестности y_0 в метрике пространства $\boxed{C[a, b]: max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| \le r,\ \ r > 0}$
(Шар радиуса r с центром в точке y_0)

70. Что такое **сильный максимум** Функционала. Какой максимум называется строгим

Будем говорить, что на функции $y_0(x)$ достигается сильный максимум $\forall y \in Y'$ из окрестности y_0 в метрике пространства $\boxed{C[a, b]: max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| \ge r,\ \ r > 0}$
(Шар радиуса r с центром в точке y_0)

71. Что такое **слабый минимум** Функционала. Какой минимум называется строгим

Будем говорить, что на функции $y_0(x)$ достигается слабый минимум $\forall y \in Y'$ из окрестности y_0 в метрике пространства
$\boxed{C^{(1)}[a, b]: max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| + max_{x \in [a, b]} |y'(x) - y_0'(x)| \le r,\ \ r > 0}$
(Шар радиуса r с центром в точке y_0)

72. Что такое **слабый максимум** Функционала. Какой максимум называется строгим

Будем говорить, что на функции $y_0(x)$ достигается слабый максимум $\forall y \in Y'$ из окрестности y_0 в метрике пространства

$$\boxed{C^{(1)}[a,b]: max_{x\in[a,b]}|y(x)-y_0(x)|+max_{x\in[a,b]}|y'(x)-y_0'(x)| \geq r,\ \ r>0}$$

(Шар радиуса r с центром в точке y_0)

73. Сформулировать **необходимое условие экстремума** для задачи с закрепленными концами.

1. Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум (сильный или слабый) в задаче с закрепленными концами и дважды непрерывно дифференцируема
2. Функция $F(x, y, y')$ обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно

Тогда $\boxed{\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'}=0 \\ y(a)=y_{0,} y(b)=y_1 \end{cases}}$

74. **Основная лемма вариационного исчисления**.

Пусть $\varphi(x)$ - фиксированная непрерывная на $[a,b]$ функция и $\int_a^b h(x)\varphi(x)dx=0$, для всякой непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$ такой, что $h(a)=h(b)=0$. Тогда $\boxed{\varphi(x)\equiv 0}$

75. Поставить задачу с **закрепленными концами** и сформулировать необходимые условия экстремума для функционала $V[y]=\int_a^b F(x, y_{1,} \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx$

Задача аналогична – нахождение экстремума функционала на множестве вектор функций $y=(y_{1,} \ldots, y_n)$, $y_i(a)=A_i,\ y_i(b)=B_i$.

Необходимые условия

1. Пусть функции $y_{1,} \cdots, y_n$ осуществляют экстремум функционала $V[y]$ в задаче с закрепленными концами и дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$.
2. $F(x, y_{1,} \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда эта груда функций удовлетворяет уравнениям Эйлера:

$\boxed{\begin{cases} F_{y_i} - \dfrac{d}{dx}F_{y_i'}=0 \\ y_i(a)=A_i, y_i(b)=B_i \end{cases}}$, где $\boxed{i=1,2,\ldots,n}$

76. Поставить задачу отыскания **экстремума функционала**

$V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')$, при условии, что **концы закреплены** и имеется **неголономная связь**. Сформулировать необходимые условия экстремума.

Рассмотрим задачу об отыскании эксремума этого функционала, где $y(x), z(x)$ функции с граничными условиями $y(a)=y_{0,} y(b)=y_1; z(a)=z_{0,} z(b)=z_1$. Кроме того эти функции удовлетворяют уравнению связи $\Phi(x,y,z,y',z')=0$ т.к. В уравнение связи входят и первые производные эта связь называется неголономной.

Необходимые условия

1. Пусть $y(x), z(x)$ осуществляют экстремум функционала в задаче с закрепленными концами и удовлетворяют уравнению связи и дважды непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$
2. F, Φ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включтельно, причем $\Phi_i \neq 0$

Тогда существует дифференцируемая функция $\lambda(x)$ такая, что $y(x), z(x)$ удовлетворяют системе эйлера для функционала $\int_a^b H(x,y,z,y',z')$, где $H=F+\lambda\Phi$:

$$\boxed{\begin{cases} F_y+\lambda\Phi_y-\dfrac{d}{dx}(F_y+\Phi_y)=0 \\ F_z+\lambda\Phi_z-\dfrac{d}{dx}(F_z+\Phi_z)=0 \\ \Phi(x,y,z,y',z')=0 \\ y(a)=y_{0,} y(b)=y_1 \\ z(a)=z_{0,} z(b)=z_1 \end{cases}}$$

77. Поставить задачу отыскания экстремума функционала $V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')$, при условии, что **концы закреплены** и имеется **голономная** связь. Сформулировать необходимые условия экстремума.

Рассмотрим задачу об отыскании эксремума этого функционала, где $y(x),z(x)$ функции с граничными условиями $y(a)=y_{0,}y(b)=y_1;z(a)=z_{0,}z(b)=z_1$. Кроме того эти функции удовлетворяют уравнению связи $\Phi(x,y,z)=0$ т.к. В уравнение связи входят не первые производные эта связь называется голономной.

Граничные условия теперь нельзя считать независимыми, потому что $\Phi(a,y,z)=0$ и $\Phi(b,y,z)=0$

Необходимые условия

3. Пусть $y(x),z(x)$ осуществляют экстремум функционала в задаче с закрепленными концами и удовлетворяют уравнению связи и дважды непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$
4. F,Φ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включтельно, причем $\Phi_z\neq 0$

Тогда существует дифференцируемая функция $\lambda(x)$ такая, что $y(x),z(x)$ удовлетворяют системе эйлера для функционала $\boxed{\int_a^b H(x,y,z,y',z')}$, где $\boxed{H=F+\lambda\Phi}$:

$$\boxed{\begin{cases}(F_y+\lambda\Phi_y)-\dfrac{d}{dx}F_y=0\\(F_z+\lambda\Phi_z)-\dfrac{d}{dx}F_z=0\\\Phi(x,y,z)=0\\y(a)=y_{0,}y(b)=y_1\\z(a)=z_{0,}z(b)=z_1\end{cases}}$$

78. Что такое **геодезическая линия.**

Пусть $\Phi(x,y,z)$ Задает какую-то поверхность в пространстве. Выберем там две точки. Поставим задачу об нахождении кратчайшей линии, соединяющей эти точки и принадлежащей этой поверхности. Эта линия будет называться геодезической

79. Сформулировать **изопериметрическую задачу** с закрепленными концами и необходимые условия экстремума этой задачи

Задача, как и все вышел об нахождении экстремума функционала $V[y]=\int_a^b F[x,y,y']dx$ при выполнении граничных условий $y(a)=y_{0,}\, y(b)=y_1$ и дополнительного условия $I(y)=\int_a^b G(x,y,y')dx=1$

Необходимые условия.

1. Пусть $y(x)$ реализует экстремум функционала $V[y]=\int_a^b F[x,y,y']dx$ и дважды непрерывно дифференцируема
2. Функции F, G непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно

тогда существует $\lambda=const$, такое, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала $\int_a^b Hdx$, где $H=F+\lambda G$

80. Что такое условие **трансверсальности**.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $V[y]=\int_a^{x_1} F(x,y,y')dx$, при условии, что левый конец на котором достигается экстремум закрплен, $y(a)=y_0$ а правы может перемещаться вдоль заданной кривой $y=\varphi(x)$. Условие $\boxed{(F-(y'-\varphi')F_{y'})_{x=x_1}=0}$ называется условием трансверсальности

81. Поставить задачу **отыскания экстремума** простейшего функционала варианционного исчисления, при условии, что **левый конец закреплен**, а **правый повиже**н и записать необходимые условия экстремума.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $V[y]=\int_a^{x_1} F(x,y,y')dx$, при условии, что левый конец функции, на котором достигается экстремум закреплен $y(a)=y_0$, а правый может перемещаться вдоль заданной кривой $y=\varphi(x)$
x_1 - абсциса точки пересечения $\varphi(x)$ и $y(x)$

Необходимые условия

1. Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум в поставленной выше задаче и дважды непрерывно дифференцируема.
2. F - функция непрерывная со своими частными производными до второго порядка включительно.
3. $\varphi(x)$ - непрерывна с первой производной

Тогда:

1. $y(x)$ удовлетворяет уравнению эйлера $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$
2. При $x=x_1$ выполнено условие транверсальности $(F-(y'-\varphi')F_{y'})=0$

82. Поставить задачу отыскания экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, при условии, что **левый конец свободен**, а **правый повижен** и записать необходимые условия экстремума.

Рассмотрим задачу минимизации функционала $V[y]=\int_{B[y]}^{x_1} F(x,y,y')dx$, при условии, что левый конец функции свободен, то есть может перемещаться вдоль прямой $x=b$, а правый может перемещаться вдоль заданной кривой $y=\varphi(x)$.

x_1 - абсциса точки пересечения $\varphi(x)$ и $y(x)$

Необходимые условия

1. Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум в поставленной выше задаче и дважды непрерывно дифференцируема.
2. F - функция непрерывная со своими частными производными до второго порядка включительно.
3. $\varphi(x)$ - непрерывна с первой производной

Тогда:

1. $y(x)$ удовлетворяет уравнению эйлера $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$
2. При $x=x_1$ выполнено условие транверсальности $\left(F-(y'-\varphi')F_{y'}\right)=0$
3. Граничное условие, когда второй конец свободен $F_y=0,\ x=b$

83. Поставить задачу отыскания экстремума простейшего функционала, вариационного исчисления, при условии, что **оба конца подвижны** и записать необходимые условия экстремума

Рассмотрим задачу минимизации функционала $V[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$, при условии, что оба конец функции свободены, то есть могут перемещаться вдоль кривых $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$

x_1 - абсциса точки пересечения $\varphi(x)$ и $y(x)$

Необходимые условия

1. Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум в поставленной выше задаче и дважды непрерывно дифференцируема.
2. F - функция непрерывная со своими частными производными до второго порядка включительно.
3. $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - непрерывны с первой производной

Тогда:

1. $y(x)$ удовлетворяет уравнению эйлера $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$
2. При $x=x_1$ выполнено условие транверсальности $\left(F-(y'-\varphi_1')F_{y'}\right)=0$ и $\left(F-(y'-\varphi_2')F_{y'}\right)=0$

84. Поставить задачу отыскания экстремума простейшего функционала, вариационного исчисления, при условии, что она **конца свободны** и записать необходимые условия экстремума

Рассмотрим задачу минимизации функционала $V[y]=\int\limits_{B_1[y]}^{B_2[y]} F(x,y,y')\,dx$,

при условии, что оба конца свободны, то есть могу перемещаться вдоль прямых $x=b$ и $x=a$

Необходимые условия

1. Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум в поставленной выше задаче и дважды непрерывно дифференцируема.
2. F - функция непрерывная со своими частными производными до второго порядка включительно.

Тогда:

1. $y(x)$ удовлетворяет уравнению эйлера $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$
2.
3. При $x=x_1$ выполнено условие транверсальности $\left(F-(y'-\varphi')F_{y'}\right)=0$
4. Граничное условие, конец свободен $F_y=0,\ x=b$ и $F_y=0,\ x=a$

85. Что такое **центральное поле экстремалей**.

Экстремалью называется решение уравнения Эйлера.
Пусть область G на плоскости (x,y) содержит кривую заданную функцией $\bar{y}(x)$

Пое называется центральным, если все экстремали **пересекаются в одной точке** ($(x_{0,}y_0)$ или $(x_{1,}y_1)$)

86. Что такое **собственное поле экстремалей.**

Экстремалью называется решение уравнения Эйлера.
Пусть область G на плоскости (x,y) содержит кривую заданную функцией $\bar{y}(x)$

Если через каждую точку области G проходит **единственная функция**, являющаяся решением уравнения Эйлера, то говорят, что множетсво таких экстремалей образуют собственное поле.

87. Сформулировать **достаточные условия сильного минимиума** в задаче с закрепленными концами. С использованием функции Вейерштраса

Определим функцию Вейерштраса как
$\boxed{E(x,y,y',p)=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\cdot F_p(x,y,p)}$ тогда достаточные условия сильного минимума таковы.

1. $y=\bar{y}(x)$ Удовлетворяет уравнениям Эйлера
2. $y=\bar{y}(x)$ может быть включена в центральное или собственное поле экстремалей
3. $\boxed{E(x,y,y',p)\geq 0}$ в **сильной** окрестности $y=\bar{y}(x)$

88. Сформулировать **достаточные условия слабого минимиума** в задаче с закрепленными концами. С использованием функции Вейерштраса

Определим функцию Вейерштраса как $\boxed{E(x, y, y', p) = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) \cdot F_p(x, y, p)}$ тогда достаточные условия сильного минимума таковы:

1. $y = \bar{y}(x)$ Удовлетворяет уравнениям Эйлера
2. $y = \bar{y}(x)$ может быть включена в центральное или собственное поле экстремалей
3. $\boxed{E(x, y, y', p) \geq 0}$ в **слабой** окрестности $y = \bar{y}(x)$

89. Сформулировать **достаточные условия Лежандра сильного минимума** в задаче с закрепленными концами.

Предположим, что $F(x, y, y')$ дважды непрерывно диффереренцируема по y' разложим ее в ряд тейлора по третьему аргументу с остаточным членом в форме Логранжа.

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p) \cdot F_{y'}(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, yq)$$

Функция Вейерштраса имеет вид $\boxed{E(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q)}$, для того, чтобы было выполнено условие $E \geq 0$ достаточно потребовать условия выполнения неравенства $F_{y'y'} > 0$ на экстремале $y = \bar{y}(x)$ в **сильной** окрестности. Это условие и называется условием Лежандра

90. Сформулировать **достаточные условия Лежандра слабого минимума** в задаче с закрепленными концами.

Предположим, что $F(x, y, y')$ дважды непрерывно диффереренцируема по y' разложим ее в ряд тейлора по третьему аргументу с остаточным членом в форме Логранжа.

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p) \cdot F_{y'}(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, yq)$$

Функция Вейерштраса имеет вид $E(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q)$, для того, чтобы было выполнено условие $E \geq 0$ достаточно потребовать условия выполнения неравенства $F_{y'y'} > 0$ на экстремале $y = \bar{y}(x)$ в **слабой** окрестности. Это условие и называется условием Лежандра

91. Сформулировать **достаточные условия сильного максимума** в задаче с закрепленными концами. С использованием функции Вейерштраса

Определим функцию Вейерштраса как $\boxed{E(x,y,y',p)=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\cdot F_p(x,y,p)}$ тогда достаточные условия сильного минимума таковы: $y=\bar{y}(x)$

1. Удовлетворяет уравнениям Эйлера
2. $y=\bar{y}(x)$ может быть включена в центральное или собственное поле экстремалей
3. $\boxed{E(x,y,y',p)\le 0}$ в **сильной** окрестности $y=\bar{y}(x)$

92. Сформулировать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами. С использованием функции Вейерштраса

Определим функцию Вейерштраса как $\boxed{E(x,y,y',p)=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\cdot F_p(x,y,p)}$ тогда достаточные условия сильного минимума таковы:

1. $y=\bar{y}(x)$ Удовлетворяет уравнениям Эйлера
2. $y=\bar{y}(x)$ может быть включена в центральное или собственное поле экстремалей
3. $\boxed{E(x,y,y',p)\ge 0}$ в слабой окрестности $y=\bar{y}(x)$

93. Сформулировать **достаточные условия Лежандра сильного максимума** в задаче с закрепленными концами.

Предположим, что $F(x,y,y')$ дважды непрерывно диффереренцируема по y' разложим ее в ряд тейлора по третьему аргументу с остаточным членом в форме Логранжа.

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)\cdot F_{y'}(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,yq)$$

Функция Вейерштраса имеет вид $\boxed{E(x,y,y',p)=\frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,y,q)}$, для того, чтобы было выполнено условие $\boxed{E\le 0}$ достаточно потребовать условия выполнения неравенства $F_{y'y'}<0$ на экстремале $y=\bar{y}(x)$ в **сильной** окрестности. Это условие и называется условием лежандра

94. Сформулировать **достаточные условия Лежандра слабого максимума** в задаче с закрепленными концами.

Предположим, что $F(x,y,y')$ дважды непрерывно диффереренцируема по y' разложим ее в ряд тейлора по третьему аргументу с остаточным членом в форме Логранжа.

$$F(x,y,y')=F(x,y,p)+(y'-p)\cdot F_{y'}(x,y,p)+\frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,yq)$$

Функция Вейерштраса имеет вид $\boxed{E(x,y,y',p)=\frac{(y'-p)^2}{2}F_{y'y'}(x,y,q)}$, для того, чтобы было выполнено условие $\boxed{E\le 0}$ достаточно потребовать условия выполнения неравенства $F_{y'y'}<0$ на экстремале $y=\bar{y}(x)$ в слабой окрестности. Это условие и называется условием лежандра

95. Дать определение **корректно и некорректно** поставленной задачи

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$Ay=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds=f(x)$ Мы можем рассматривать оператор действующий в следующих пространствах $C[a,b]\to h[c,d]$ и $h[a,b]\to h[a,b]$. В первом случае задача решения уравнения Фредгольма первого рода является некореткно поставленой

Условия коректной постановки задачи

1. Решение существует для любой непрерывной на $[a,b]$ функции (на самом деле это не так)
2. Единственность решения
3. Устойчивость решения (для любой последовательности $f\to\bar{f}$ $Ay_n=f_n, A\bar{y}=\bar{f}$ последовательность $y_n\to\bar{y}$ при $n\to\infty$

96. Что такое **регуляризующий алгоритм** Тихонова

Оператор $\boxed{R(f_\delta,\delta)\equiv R_\delta(f_\delta)}$ называется регуляризующим алгоритмом для решения операторного уравнения $Ay=f$ $A:C[a,b]\to h[c,d]$, если

1. $R_\delta(f_\delta)$ определен для любого $f_\delta\in h[c,d]$ и для любого $0<\delta<\infty$. $R_\delta(f_\delta)$ отображает $h[c,d]\to C[a,b]$ прикаждом фиксированном δ
2. Для любой фукнции $\bar{y}\in C[a,b]$ и $f_\delta\in h[c,d]$ таких, что $\|f-\bar{f}\|_{h[c,d]}<\delta, \delta>0, A\bar{y}=\bar{f}$ приближенное решение $y_\delta=R_\delta(f_\delta)\to_{C[a,b]}\bar{y}$ при $\delta\to 0$

97. Какая **некоректно** поставленная задача называется **регуляризуемой**

Некорректно поставленная задача называется регуляризуемой, если сущестуует хотя бы один регуляризующий алгоритм ее решения.

98. Записать **функционал Тихонова**.

$\boxed{M^\alpha[y]=\|Ay-f^2\|_{h[c,d]}+\alpha\left(\|y\|^2_{h[c,d]}+\|y'\|^2_{h[c,d]}\right)}$ $y(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, $f\in h[c,d]$, $\alpha>0$ - параметр регуляризации.

99. Сформулировать **теорему о существовании и единстивенности минимума** функционала Тихонова

Для любой функции $f\in h[c,d]$ и любого параметра регуляризацц $\alpha>0$ существует и притом единственная функция $y^\alpha(s)$ реализующая минимум функционала $M^\alpha[y]$ и являющаяся решенеим краевой задаче для интегродифференциального уравнения Эйлера

100. Сформулировать теорему о согласовании параметра регуляризации функционала Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

Пусть $f_\delta(x)$ - непрерывная на $[c,d]: \|f-\bar{f}\|_{h[c,d]}<\delta$ $\delta\in[0,\delta_0],\ \delta_0>0$; $\bar{f}: A\bar{y}=\bar{f}$, где A интегральны оператор с ядром $K(x,s)$, $x\in[c,d]$, $s\in[a,b]$, непрерывным по совокупности аргументов и замкнутым; $\bar{y}(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b]$. Пусть параметр регуляции удовлетворяет следующим требованиям $\alpha(\delta): \alpha(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ и $\dfrac{\delta^2}{\alpha}(\delta)<C,\ C>0,\ \forall\,\delta\in[0,\delta_0]$, тогда $y_\delta^{\alpha(\delta)}=arg\,min\,M^{\alpha(\delta)}[y]$ т.е. Функция на которой достигается минимум функционала Тихонова $M^\alpha[y]=\|Ay-f_\delta^2\|_{h[c,d]}+\alpha\left(\|y\|_{h[c,d]}^2+\|y'\|_{h[c,d]}^2\right),\ \alpha=\alpha(\delta)$, обладает тем совйством , что $y_\delta^{\alpha(\delta)}\to_{C[a,b]}\bar{y},\ \delta\to 0$